# مراجعة ليلة الامتحان في الهندسة

## ★ أولاً : الدائرة :

### أولاً : أسئلة الاختيار من متعدد

❶ عدد محاور التماثل لأي دائرة هو .......

( أ ) صفر ( ب ) ١ ( جـ ) ٢ ( د ) عدد لا نهائي

---

❷ **في الشكل المقابل :**

أ ب وتر في الدائرة م ، م د ⊥ أ ب ،

أ ب = ٨ سم ، م ب = ٥ سم **فإن :** م د = .......... سم

( أ ) ٥ ( ب ) ٣ ( جـ ) ٤ ( د ) ٢

---

❸ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٤ سم ، أ نقطة في مستوي الدائرة

وكان م أ = ٤ سم **فإن :** موضع نقطة أ بالنسبة للدائرة .......... الدائرة

( أ ) تقع داخل ( ب ) تقع خارج ( جـ ) على ( د ) على مركز

---

❹ إذا كان : المستقيم ل ∩ الدائرة م = $\emptyset$ **فإن :** المستقيم ل يكون ............. الدائرة

( أ ) خارج ( ب ) قاطع ( جـ ) مماس ( د ) محور تماثل

---

❺ دائرة محيطها ٦ $\pi$ سم ،والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم

**فإن :** المستقيم ل يكون ...........

( أ ) مماسًا للدائرة ( ب ) قاطعًا للدائرة ( جـ ) خارج للدائرة ( د ) قطرًا للدائرة

---

❻ إذا كان المستقيم ل مماساً للدائرة طول قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها بمقدار..... سم

( أ ) ٣ ( ب ) ٤ ( جـ ) ٦ ( د ) ٨

---

❼ **في الشكل المقابل :**

أ ب مماس للدائرة م عند ب ، فإذا كان م ب = ٥سم

، أ جـ = ٨سم **فإن :** أ ب = .......... سم

( أ ) ٥ ( ب ) ١٠ ( جـ ) ١٢ ( د ) ١٣

---

❽ دائرتان م ، ن طولا نصفي قطريهما ٩ سم ، ٤ سم فإذا كان م ن = ٥سم

**فإن :** الدائرتين تكونان ...........

( أ ) متماستان من الخارج ( ب ) متماستان من الداخل

( جـ ) متقاطعتان ( د ) متباعدتان

⑨ إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستين من الخارج ،وطول نصف قطر أحدهما ٥سم ، م ن = ٩سم **فإن :** طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ...... سم

( أ ) ٣ ( ب ) ٤ ( جـ ) ٧ ( د ) ١٤

---

⑩ م ، ن دائرتان متقاطعتان ، طولا نصفي قطريهما ٣سم ، ٥سم **فإن :** م ن ∈ ......

( أ ) ]٨ ، ∞[ ( ب ) ]٢ ، ∞[ ( جـ ) ]٠ ، ٢[ ( د ) ]٢ ، ٨[

---

⑪ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين يساوي ...........

( أ ) ١ ( ب ) ٢ ( جـ ) ٣ ( د ) ٤

---

⑫ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط تقع على استقامة واحدة هو ...........

( أ ) صفر ( ب ) واحد ( جـ ) ثلاث ( د ) عدد لا نهائي

---

⑬ عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ...........

( أ ) صفر ( ب ) ١ ( جـ ) ٢ ( د ) عدد لا نهائي

---

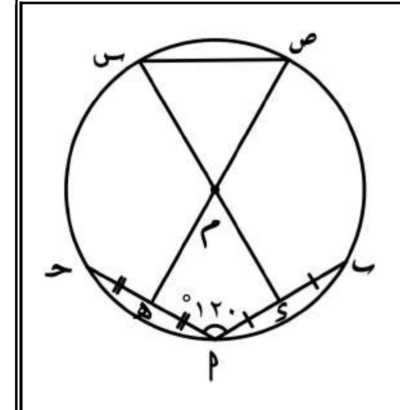
## ثانيًا : الأسئلة المقالية

### * تعاريف ومفاهيم أساسية :

**١ في الشكل المقابل :**

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ وتران في الدائرة م يحصران بينهما زاوية قياسها ١٢٠° ، ء ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ علي الترتيب ، رسم $\overleftarrow{ءم}$ ، $\overleftarrow{هـم}$ فقطعا الدائرة في س ، ص علي الترتيب

**أثبت أن :** Δ س ص م متساوي الأضلاع




**البرهان :**

∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ ∴ ق(∠ م ء أ) = ٩٠°

∵ هـ منتصف $\overline{أجـ}$ ∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{أجـ}$ ∴ ق(∠ م هـ أ) = ٩٠°

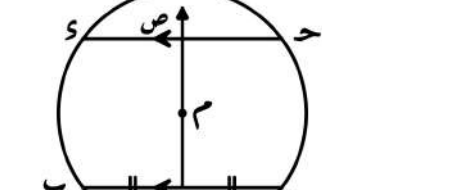
∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ ء م هـ) = ٣٦٠° − ( ٩٠° + ٩٠° + ١٢٠° ) = ٦٠°

∴ ق(∠ س م ص) = ٦٠° بالتقابل بالرأس ، ∵ م س = م ص = نق

∴ Δ م س ص متساوي الأضلاع

**٢ في الشكل المقابل :**



م دائرة ، أ ب // حـ ء ، س منتصف أ ب

، رسم س م فقطع حـ ء في ص

**أثبت أن :** ص منتصف حـ ء

**البرهان :**

∵ س منتصف أ ب    ∴ م س ⊥ أ ب    ∴ ق( ∠ م س أ ) = ٩٠°

∵ أ ب // حـ ء    ∴ ق( ∠ حـ ص م ) = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠° بالتداخل

∴ م ص ⊥ حـ ء    ∴ ص منتصف حـ ء

**٣ في الشكل المقابل :**

م دائرة طول نصف قطرها ١٣سم

، أ ب وتر فيها طوله ٢٤سم ، حـ منتصف أ ب

**أوجد بالبرهان :** مساحة Δ أ ء ب



**البرهان :**



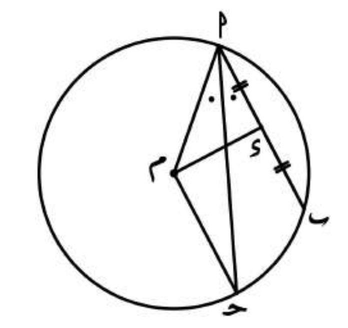
∵ حـ منتصف أ ب ، أ ب = ٢٤ سم    ∴ م حـ ⊥ أ ب ، أ حـ = ١٢سم

∵ Δ أ م حـ قائم الزاوية في حـ    ∴ م حـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (١٢)^٢}$ = ٥ سم

∴ حـ ء = ١٣ - ٥ = ٨ سم

∴ مساحة Δ أ ء ب = $\frac{١}{٢}$ × طول القاعدة × الارتفاع = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ٨ = ٩٦ سم$^٢$

**٤ في الشكل المقابل :**



أ ب وتر في الدائرة م ، أ حـ ينصف ( ∠ ب أ م )

ويقطع الدائرة م في حـ ، إذا كان ء منتصف أ ب

**أثبت أن :** ء م ⊥ م حـ

**البرهان :**

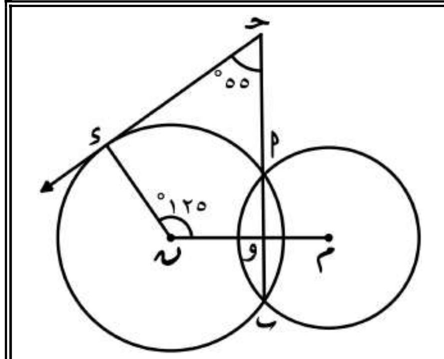
∵ م أ = م حـ = نق    ∴ ق( ∠ م أ حـ ) = ق( ∠ حـ )    ❶

∵ أ حـ ينصف ( ∠ ب أ م )    ∴ ق( ∠ م أ حـ ) = ق( ∠ ب أ حـ )    ❷

من ❶ ، ❷ :    ∴ ق( ∠ ب أ حـ ) = ق( ∠ حـ ) وهما في وضع التبادل ∴ أ ب // م حـ

∵ ء منتصف أ ب    ∴ م ء ⊥ أ ب    ∴ ء م ⊥ م حـ

**٥ في الشكل المقابل :**




م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، ح $\in$ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$

، ء $\in$ الدائرة ن ، ق($\angle$ م ن ء) = ١٢٥°

، ق($\angle$ ب ح ء) = ٥٥°

**أثبت أن :** $\overleftarrow{\text{ح ء}}$ مماساً للدائرة ن عند ء

**البرهان :**

$\because$ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين ، $\overline{\text{أ ب}}$ الوتر المشترك

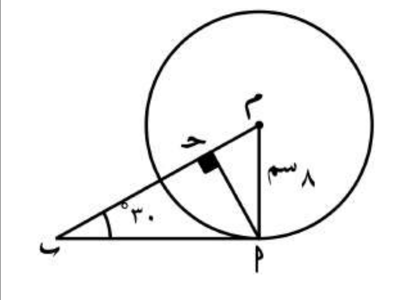
$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ $\therefore$ ق($\angle$ أ و ن) = ٩٠°

$\because$ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°

$\therefore$ ق($\angle$ ن ء ح) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٥٥° + ١٢٥°) = ٩٠°

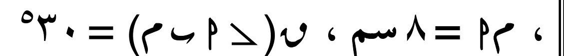
$\therefore$ $\overline{\text{ن ء}} \perp \overleftarrow{\text{ح ء}}$ $\therefore$ $\overleftarrow{\text{ح ء}}$ مماساً للدائرة ن عند ء

**٦ في الشكل المقابل :**





$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ


، م أ = ٨ سم ، ق($\angle$ أ ب م) = ٣٠°

**أوجد :** طول كل من $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ح}}$

**البرهان :**

$\because$ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ $\therefore$ $\overline{\text{م أ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ $\therefore$ ق($\angle$ م أ ب) = ٩٠°

$\because$ ق($\angle$ أ ب م) = ٣٠° $\therefore$ م ب = ٢ م أ = ١٦ سم

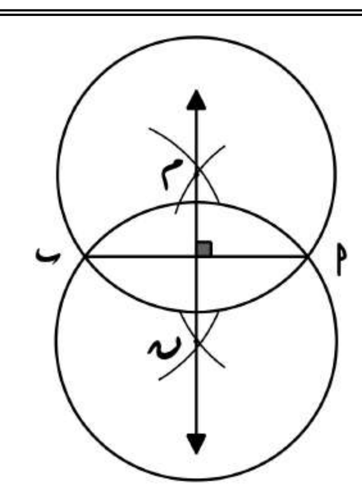
$\therefore$ أ ب = $\sqrt{(١٦)^٢ - (٨)^٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم $\therefore$ أ ح = $\frac{٨ \times ٨ \sqrt{٣}}{١٦}$ = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

**٧** باستخدام الأدوات الهندسية **:** ارسم $\overline{\text{أ ب}}$ طولها ٤ سم

ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب

وطول نصف قطرها ٣سم

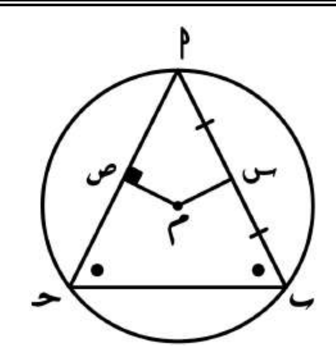
**كم** عدد الحلول الممكنة ؟ **(لا تمح الأقواس)**




**الحل :**

**عدد الحلول الممكنة** ٢

**٨ في الشكل المقابل :**




أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

فيه ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) ، س منتصف أ ب

، م ص ⊥ أ حـ **أثبت أن :** م س = م ص

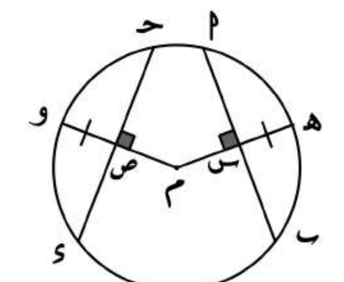
**البرهان :**

∵ ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) ∴ أ ب = أ حـ

∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∵ م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ حـ ، أ ب = أ حـ (أوتار) ∴ **م س = م ص** (أبعاد)

**٩ في الشكل المقابل :**




م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ حـ ء ، هـ س = ص و

**أثبت أن :** أ ب = حـ ء

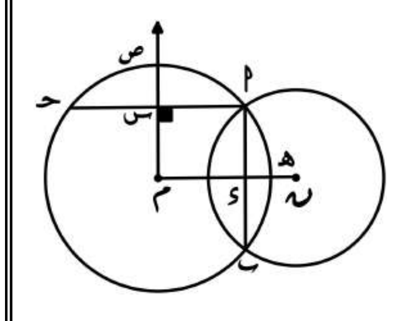
**البرهان :**

∵ هـ س = ص و ① ، م هـ = م و = نق ②

بطرح ① من ② : ∴ م س = م ص (أبعاد)

∵ م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ حـ ء ∴ **أ ب = حـ ء** (أوتار)

**١٠ في الشكل المقابل :**




م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

،رسم م س ⊥ أ حـ ويقطع أ حـ في س ويقطع الدائرة م

في ص ،رسم م ن يقطع أ ب في ء ويقطع الدائرة ن في هـ

فإذا كان : أ حـ = أ ب **أثبت أن :** س ص = ء هـ

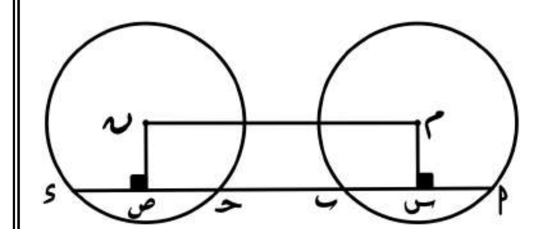
**البرهان :**

∵ م ن خط المركزين ، أ ب الوتر المشترك ∴ م ء ⊥ أ ب

∵ م س ⊥ أ حـ ، أ حـ = أ ب (أوتار) ∴ م ء = م س (أبعاد) ⟵ ①

∵ م أ = م حـ = نق ⟵ ② بطرح ① من ② : **∴ س ص = ء هـ**

**١١ في الشكل المقابل :**




م ، ن دائرتان متطابقتان ، ﺃ ب = حـ ء

م س ⊥ ﺃ ب ، ن ص ⊥ حـ ء

**أثبت أن :** الشكل م س ص ن مستطيل

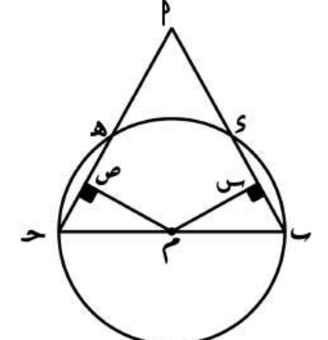
**البرهان :**

∵ م س ⊥ ﺃ ب ، ن ص ⊥ حـ ء ، ﺃ ب = حـ ء (أوتار)

∴ م س = ن ص (أبعاد) ، م س // ن ص ∴ الشكل م س ص ن متوازي أضلاع

∵ ق(∠ م س ص) = ٩٠° ∴ الشكل م س ص ن مستطيل

**١٢ في الشكل المقابل :**




ﺃ ب حـ مثلث فيه ﺃ ب = ﺃ حـ ، رسمت دائرة م

قطرها ب حـ قطعت ﺃ ب في ء ، ﺃ حـ في هـ

، م س ⊥ ب ء ، م ص ⊥ حـ هـ **أثبت أن :** ب ء = حـ هـ

**البرهان :**

∵ ﺃ ب = ﺃ حـ ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ حـ)

∵ ΔΔ ب م س ، حـ م ص **فيهما :**

ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) ، ق(∠ ب س م) = ق(∠ حـ ص م) = ٩٠° ، م ب = م حـ = نق

∴ Δ ب م س ≡ Δ حـ م ص وينتج أن : م س = م ص (أبعاد) ∴ ب ء = حـ هـ (أوتار)

---

## ★ ثانيًا : الزوايا والأقواس في الدائرة :

### أولاً : أسئلة الاختيار من متعدد

❶ قياس القوس الذي يمثل ثلث الدائرة = .............

( ﺃ ) ٦٠°     ( ب ) ٩٠°     ( حـ ) ١٢٠°     ( ء ) ٢٤٠°

---

❷ طول القوس الذي يمثل ربع محيط الدائرة يساوي ..........

( ﺃ ) ٤ $\pi$ نق     ( ب ) ٢ $\pi$ نق     ( حـ ) $\pi$ نق     ( ء ) $\frac{1}{2}$ $\pi$ نق

---

❸ قوس من دائرة طوله $\frac{1}{3}$ $\pi$ نق يقابل زاوية مركزية قياسها = ............

( ﺃ ) ٣٠°     ( ب ) ٦٠°     ( حـ ) ١٢٠°     ( ء ) ٢٤٠°

**٤** قياس الزاوية المحيطية يساوي .......... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس

( أ ) نصف ( ب ) ضعف ( جـ ) ربع ( د ) ثلث

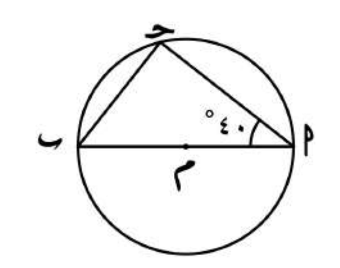
---

**٥** قياس الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة = ..........

( أ ) ٤٥° ( ب ) ٩٠° ( جـ ) ١٢٠° ( د ) ١٨٠°

---

**٦** **في الشكل المقابل :**




أب قطر للدائرة م ، ق(∠أ) = ٤٠°

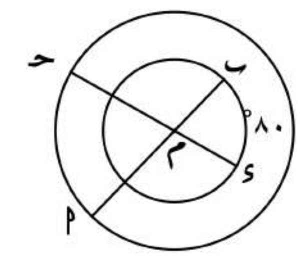
**فإن :** ق(∠ب) = .............

( أ ) ١٤٠° ( ب ) ٩٠°

( جـ ) ٤٠° ( د ) ٥٠°

---

**٧** **في الشكل المقابل :**




دائرتان متحدتا المركز في م ، فإذا كان ق(ب⌒د) = ٨٠°

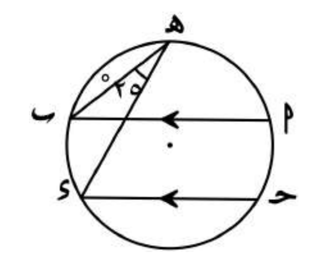
**فإن :** ق(أ⌒جـ) = .............

( أ ) ٤٠° ( ب ) ٨٠°

( جـ ) ١٠٠° ( د ) ١٦٠°

---

**٨** **في الشكل المقابل :**




أب ، جـ د وتران متوازيان ، ق(∠ب هـ د) = ٢٥°

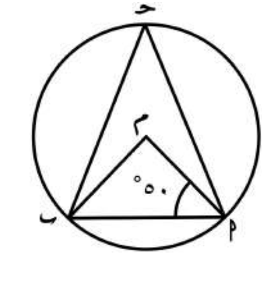
**فإن :** ق(أ⌒جـ) = .............

( أ ) ٢٥° ( ب ) ٥٠°

( جـ ) ١٠٠° ( د ) ١٢,٥°

---

**٩** **في الشكل المقابل :**




إذا كان : ق(∠م أ ب) = ٥٠°

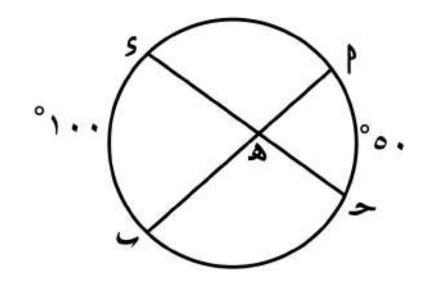
**فإن :** ق(∠أ جـ ب) = .............

( أ ) ٤٠° ( ب ) ٨٠°

( جـ ) ١٠٠° ( د ) ١٦٠°

---

**١٠** **في الشكل المقابل :**




ق(أ⌒جـ) = ٥٠° ، ق(د⌒ب) = ١٠٠°

**فإن :** ق(∠أ هـ جـ) = ..........

( أ ) ٥٠° ( ب ) ١٠٠°

( جـ ) ١٦٠° ( د ) ٧٥°

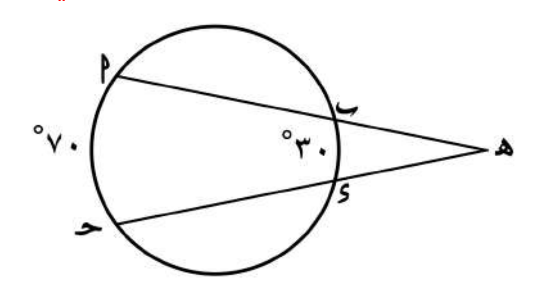
⓫ في الشكل المقابل :

ق( أ حـ ) = ٧٠° ، ق( ب ء ) = ٣٠°

فإن : ق(∠ هـ) = ..........

( أ ) ٢٠°    ( ب ) ٤٠°

( حـ ) ٥٠°    ( ء ) ١٠٠°




---

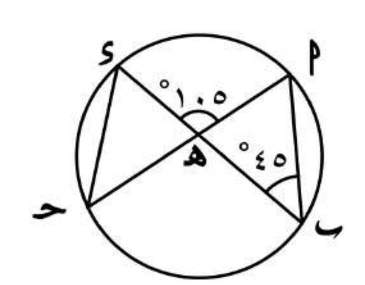
⓬ في الشكل المقابل : أ حـ ∩ ب ء = {هـ}

، ق(∠ ب) = ٤٥° ، ق(∠ أ هـ ء) = ١٠٥°

فإن : ق(∠ ب ء حـ) = ..........

( أ ) ٤٥°    ( ب ) ٦٠°

( حـ ) ١٥٠°    ( ء ) ١٠٥°




---

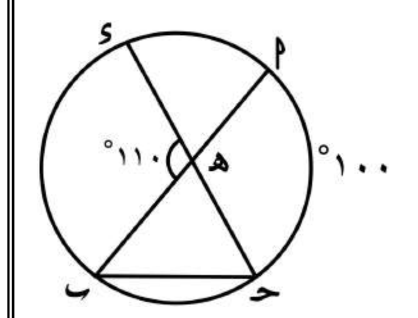
## ثانيًا : الأسئلة المقالية

**١ في الشكل المقابل :**

أ ب ، حـ ء وتران في الدائرة م ، أ ب ∩ حـ ء = { هـ }

، ق(∠ ء هـ ب) = ١١٠° ، ق( أ حـ ) = ١٠٠°

**أوجد :** ق(∠ ء حـ ب)




**البرهان :**

∵ ق( أ حـ ) = ١٠٠°    ∴ ق(∠ أ ب حـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق( أ حـ ) = ٥٠°

∵ ء ، هـ ، حـ على استقامة واحدة    ∴ ق(∠ حـ هـ ب) = ١٨٠° - ١١٠° = ٧٠°

∴ ∆ هـ حـ ب : ق(∠ ء حـ ب) = ١٨٠° - (٥٠° + ٧٠°) = **٦٠°**

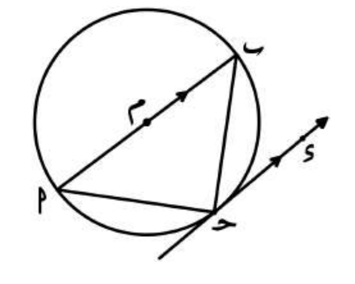
---

**٢ في الشكل المقابل :**

أ ب قطر في الدائرة م

، حـ ء مماس للدائرة عند حـ ، حـ ء // أ ب

❶ **أثبت أن :** أ حـ = ب حـ    ❷ **أوجد :** ق(∠ ب)

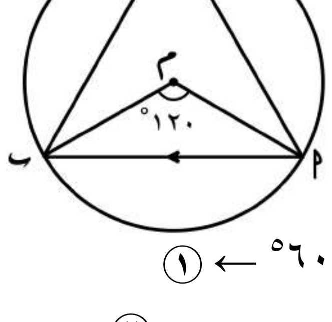



**البرهان :**

∵ حـ ء // أ ب    ∴ ق( أ حـ ) = ق( حـ ب )    ∴ **أ حـ = ب حـ**

∵ أ ب قطر في الدائرة م    ∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠°    ∴ ق(∠ ب) = **٤٥°**

**٣ في الشكل المقابل :**




$\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة عند حـ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$

، ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

**أثبت أن :** Δ أ حـ ب متساوي الأضلاع

**البرهان :** ∵ ق(∠ أ م ب) = ١٢٠°

∴ ق(∠ أ حـ ب) المحيطية = ½ ق(∠ أ م ب) المركزية = ٦٠° ← ①

∵ $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}} \parallel \overline{\text{أ ب}}$ ∴ ق($\widehat{\text{حـ أ}}$) = ق($\widehat{\text{حـ ب}}$) ∴ حـ أ = حـ ب ← ②

من ① ، ② ينتج أن : Δ أ حـ ب متساوي الأضلاع

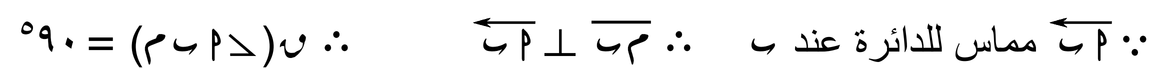

**٤ في الشكل المقابل :**

أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب

، $\overleftarrow{\text{أ م}}$ قطع الدائرة م في حـ ، ء علي الترتيب

، ق(∠ أ) = ٤٠° **أوجد :** ق(∠ ب ء حـ) ، ق($\widehat{\text{ب حـ}}$)


**البرهان :**


∵ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند ب ∴ $\overline{\text{م ب}} \perp \overleftarrow{\text{أ ب}}$ ∴ ق(∠ أ ب م) = ٩٠°

∴ Δ أ م ب : ق(∠ ب م أ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

∴ ق(∠ ب ء حـ) المحيطية = ½ ق(∠ ب م حـ) المركزية = **٢٥°**

∴ ق($\widehat{\text{ب حـ}}$) = ق(∠ ب م حـ) المركزية = **٥٠°**

**٥ في الشكل المقابل :**

ق(∠ أ) = ٤٠° ، ق(∠ ء حـ ب) = ٢٦°

**أوجد :** ق($\widehat{\text{هـ حـ}}$) ، ق(∠ هـ س حـ)


**البرهان :**

∵ ق(∠ ء حـ ب) = ٢٦° ∴ ق($\widehat{\text{ء ب}}$) = ٢ ق(∠ ء حـ ب) المحيطية = ٥٢°

∵ $\overleftarrow{\text{ء هـ}} \cap \overleftarrow{\text{ب حـ}}$ = {أ} ∴ ق(∠ أ) = ½ [ق($\widehat{\text{هـ حـ}}$) − ق($\widehat{\text{ء ب}}$)]

∴ ٨٠° = ق($\widehat{\text{هـ حـ}}$) − ٥٢° ∴ ق($\widehat{\text{هـ حـ}}$) = ٨٠° + ٥٢° = **١٣٢°**

∵ $\overline{\text{ء حـ}} \cap \overline{\text{ب هـ}}$ = {س}

∴ ق(∠ هـ س حـ) = ½ [ق($\widehat{\text{ء ب}}$) + ق($\widehat{\text{هـ حـ}}$)] = ½ (٥٢° + ١٣٢°) = **٩٢°**

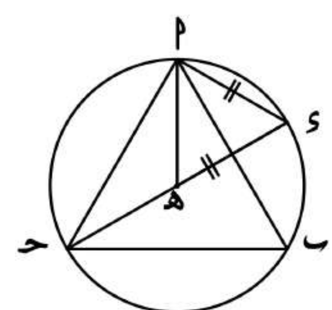
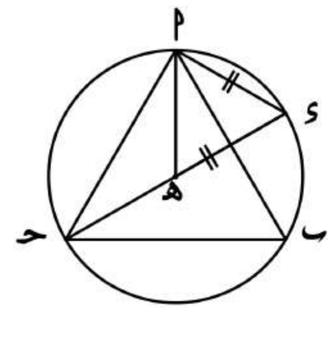
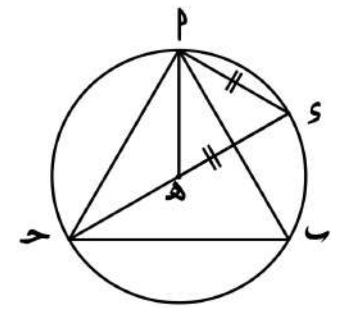


**٦ في الشكل المقابل :**



Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع ، أ ء = ء هـ

**أثبت أن :** Δ أ ء هـ متساوي الأضلاع


**البرهان :** ∵ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع ∴ ق(∠ ب) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ ء حـ) المحيطية = ق(∠ أ ب حـ) المحيطية = ٦٠°

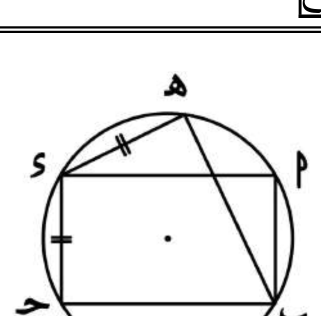
∵ أ ء = ء هـ ∴ Δ أ ء هـ متساوي الأضلاع

**٧ في الشكل المقابل :**

أ ب حـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة

، رسم الوتر $\overline{\text{ب هـ}}$ بحيث ء حـ = ء هـ

**أثبت أن :** ب هـ = أ ء




**البرهان :**

∵ أ ب حـ ء مستطيل ∴ أ ب = ء حـ

∵ ء حـ = ء هـ ∴ أ ب = ء هـ

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) بإضافة ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) للطرفين :

∴ ق($\overset{\frown}{\text{ب أ هـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ ء}}$) ∴ ب هـ = أ ء

**٨ في الشكل المقابل :**

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل الدائرة ، $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

**أثبت أن :** ق(∠ ء أ حـ) = ق(∠ ب أ هـ)

**البرهان :** ∵ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ ق($\overset{\frown}{\text{ء ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{هـ حـ}}$)

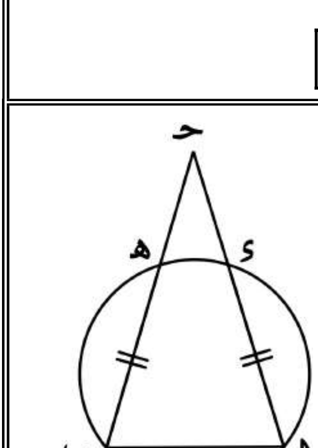
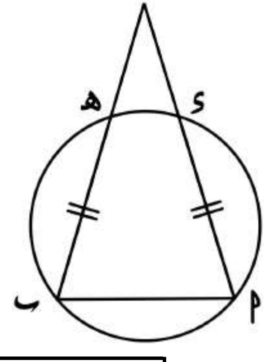
∴ ق(∠ ء أ ب) المحيطية = ق(∠ حـ أ هـ) المحيطية

بإضافة ق(∠ ب أ حـ) للطرفين : ∴ ق(∠ ء أ حـ) = ق(∠ ب أ هـ)

**٩ في الشكل المقابل :**

$\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{ب هـ}}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة

، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ = {حـ} **أثبت أن :** ء حـ = حـ هـ


**البرهان :** ∵ أ ء = ب هـ

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب هـ}}$) بإضافة ق($\overset{\frown}{\text{ء هـ}}$) للطرفين

∴ ق($\overset{\frown}{\text{أ ء هـ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب هـ ء}}$) ∴ ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ ب أ ء)

∴ أ حـ = ب حـ (١) ∵ أ ء = ب هـ (٢) بطرح (٢) من (١) : ∴ ء حـ = حـ هـ

## ★ ثالثا : الشكل الرباعي الدائري :

### أولاً : أسئلة الاختيار من متعدد

١ في الشكل الرباعي الدائري كل زاويتين متقابلتين ...........

( أ ) متساويتان ( ب ) متتامتان ( حـ ) متكاملتان ( ء ) متبادلتان

٢ أ ب حـ ء شكل رباعي دائري فيه : ق(∠أ) = ٣ ق(∠حـ) فإن : ق(∠أ) = ...........

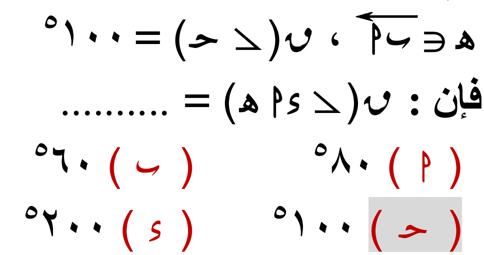
( أ ) ٤٥° ( ب ) ٦٠° ( حـ ) ١٢٠° ( ء ) ١٣٥°

٣ أي من الأشكال الآتية يسمي رباعيًا دائريًا ؟ ...........

( أ ) المعين ( ب ) المربع ( حـ ) متوازي الأضلاع ( ء ) شبه المنحرف

٤ في الشكل المقابل :



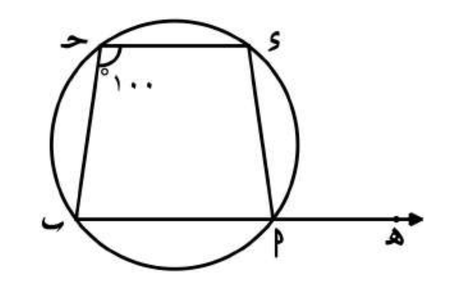


هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، ق(∠حـ) = ١٠٠°

فإن : ق(∠ء أ هـ) = ..........

( أ ) ٨٠° ( ب ) ٦٠°

( حـ ) ١٠٠° ( ء ) ٢٠٠°



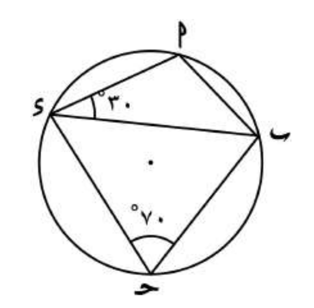

٥ في الشكل المقابل :

ق(∠حـ) = ٧٠° ، ق(∠أ ء ب) = ٣٠°

فإن : ق(∠أ ب ء) = ..........

( أ ) ٣٠° ( ب ) ٤٠°

( حـ ) ٧٠° ( ء ) ١٠٠°



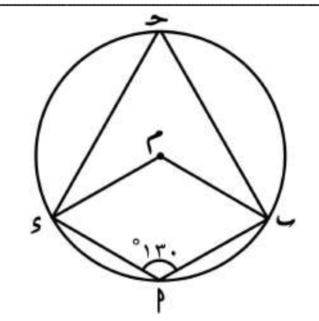

٦ في الشكل المقابل :

إذا كان : ق(∠أ) = ١٣٠°

فإن : ق(∠ب م ء) = ..........

( أ ) ٥٠° ( ب ) ٨٠°

( حـ ) ١٠٠° ( ء ) ١٣٠°



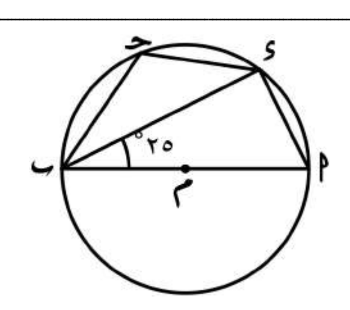

٧ في الشكل المقابل :

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م ، ق(∠أ ب ء) = ٢٥°

فإن : ق(∠حـ) = ..........

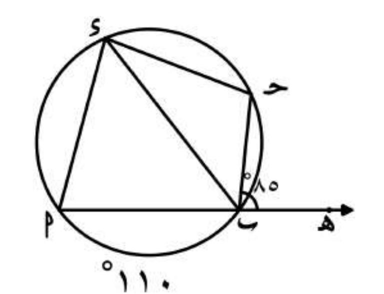
( أ ) ٥٠° ( ب ) ١٠٠°

( حـ ) ١١٥° ( ء ) ١٢٥°



## ثانيًا : الأسئلة المقالية

**١ في الشكل المقابل :**




هـ ∈ أب ، هـ ∉ أب ، ق(أب⌒) = ١١٠°

، ق(∠حـ ب هـ) = ٨٥°

**أوجد :** ق(∠ب ء حـ)

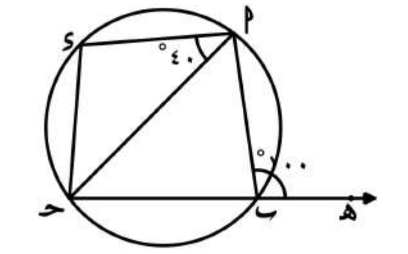
**البرهان :** ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠حـ ب هـ) الخارجة = ق(∠حـ ء أ) المقابلة للمجاورة لها = ٨٥°

∵ ق(∠ب ء أ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(أب⌒) = ٥٥°

∴ ق(∠ب ء حـ) = ٨٥° - ٥٥° = **٣٠°**

**٢ في الشكل المقابل :**



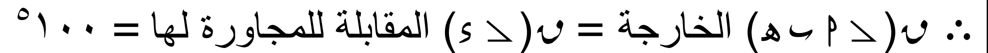

ق(∠أ ب هـ) = ١٠٠° ، ق(∠حـ أ ء) = ٤٠°

**أثبت أن :** ق(حـ ء⌒) = ق(أ ء⌒)

**البرهان :** ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

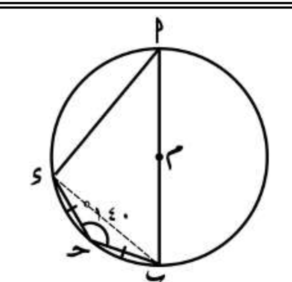
∴ ق(∠أ ب هـ) الخارجة = ق(∠ء) المقابلة للمجاورة لها = ١٠٠°

∴ Δ أ ء حـ : ق(∠أ حـ ء) = ١٨٠° - (١٠٠° + ٤٠°) = ٤٠°



∴ ق(∠حـ أ ء) = ق(∠أ حـ ء) = ٤٠° ∴ **ق(حـ ء⌒) = ق(أ ء⌒)**

**٣ في الشكل المقابل :**




أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة م

، م ∈ أب ، حـ ب = حـ ء ، ق(∠ب حـ ء) = ١٤٠°

**أوجد :** ❶ ق(∠أ) ❷ ق(∠ء)

**العمل :** نرسم ب ء

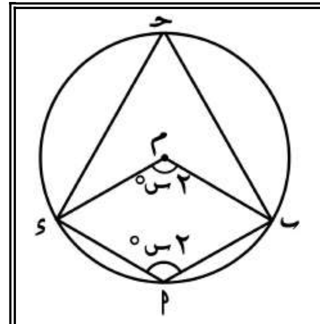
**البرهان :** ∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري ∴ ق(∠أ) = ١٨٠° - ١٤٠° = **٤٠°**

∵ أب قطر في الدائرة م ∴ ق(∠أ ء ب) = ٩٠°

∵ حـ ب = حـ ء ∴ ق(∠ب ء حـ) = $\frac{١٨٠-١٤٠}{٢}$ = ٢٠°

∴ ق(∠أ ء حـ) = ٩٠° + ٢٠° = **١١٠°**

**٤ في الشكل المقابل :**




ق(∠ م) = ق(∠ ٲ) = ٢ س°

**أوجد :** ق(∠ ٲ)

**البرهان :** ∵ ق(∠ م) = ٢ س°

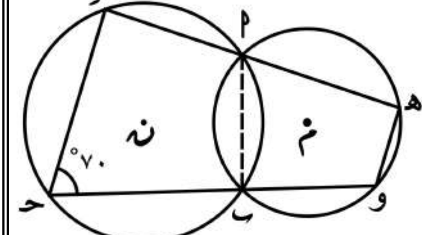
∴ ق(∠ حـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ م) المركزية = س°

∵ الشكل ٲ ب حـ ء رباعي دائري ∴ ق(∠ٲ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

∴ ٢ س° + س° = ١٨٠° ∴ ٣ س° = ١٨٠° (÷٣)

∴ س° = ٦٠° ∴ ق(∠ ٲ) = ٢ س° = **١٢٠°**

**٥ في الشكل المقابل :**




م ، ن دائرتان متقاطعتان في ٲ ، ب

رسم ٲ ء ، ب حـ يقطعان الدائرة ن في ء ، حـ

الدائرة م في هـ ، و على الترتيب ، ق(∠ ب حـ ء) = ٧٠°

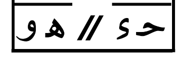
❶ **أوجد :** ق(∠ و) ❷ **برهن أن :** حـ ء // هـ و

**العمل :** نرسم ٲ ب

**البرهان :** ∵ الشكل ٲ ب حـ ء رباعي دائري

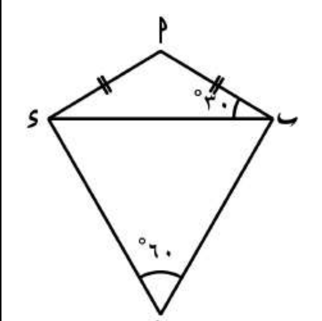
∴ ق(∠ هـ ٲ ب) الخارجة = ق(∠ حـ) المقابلة للمجاورة لها = ٧٠°

∵ الشكل ٲ ب و هـ رباعي دائري ∴ ق(∠ و) = ١٨٠° - ٧٠° = **١١٠°**

∵ ق(∠و) + ق(∠ حـ) = ١٨٠° وهما في تداخل ∴  **حـ ء // هـ و**



**٦ في الشكل المقابل :**




ٲ ب = ٲ ء ، ق(∠ ٲ ب ء) = ٣٠°

، ق(∠ حـ) = ٦٠°

**برهن أن :** الشكل ٲ ب حـ ء رباعي دائري

**البرهان :**

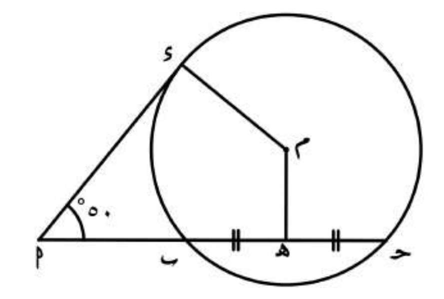
∵ ٲ ب = ٲ ء ∴ ق(∠ ٲ ب ء) = ق(∠ ٲ ء ب) = ٣٠°

∴ △ ٲ ب ء : ق(∠ ٲ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°

∴ ق(∠ ٲ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠° (وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان)

∴ **الشكل ٲ ب حـ ء رباعي دائري**

## ٧ في الشكل المقابل :




أد مماس للدائرة م ، أحـ يقطع الدائرة في ب ، حـ

، هـ منتصف ب حـ ، ق(∠أ) = ٥٠°

**١ أثبت أن :** الشكل أ هـ م د رباعي دائري

**٢ أوجد :** ق(∠د م هـ)

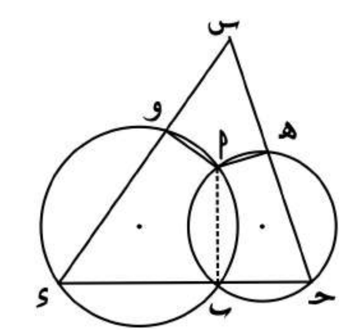
**البرهان:** ∵ هـ منتصف ب حـ ∴ م هـ ⊥ ب حـ ∴ ق(∠م هـ ب) = ٩٠°

∵ أد مماس للدائرة م عند د ∴ م د ⊥ أ د ∴ ق(∠م د أ) = ٩٠°

∵ ق(∠م هـ ب) + ق(∠م د أ) = ١٨٠° (وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان)

∴ الشكل أ هـ م د رباعي دائري ∴ ق(∠د م هـ) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

## ٨ في الشكل المقابل :




دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، حـ د يمر بالنقطة ب

ويقطع الدائرتين في حـ ، د ، حـ هـ ∩ د و = {س}

**برهن أن :** الشكل أ و س هـ رباعي دائري

**العمل:** نرسم أ ب

**البرهان:**

∵ الشكل أ ب حـ هـ رباعي دائري ∴ ق(∠س هـ أ)الخارجة = ق(∠أ ب حـ)المقابلة للمجاورة

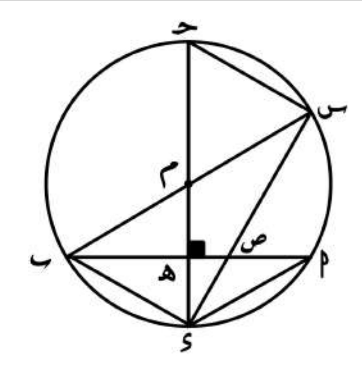
∵ الشكل أ ب د و رباعي دائري ∴ ق(∠س و أ)الخارجة = ق(∠أ ب د) المقابلة للمجاورة

∵ حـ ، ب ، د على استقامة واحدة ∴ ق(∠أ ب حـ) + ق(∠أ ب د) = ١٨٠°

∴ ق(∠س هـ أ) + ق(∠س و أ) = ١٨٠° (وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان)

∴ الشكل أ و س هـ رباعي دائري

## ٩ في الشكل المقابل :




أ ب وتر في الدائرة م ، حـ د قطر فيها عمودي على أ ب

، س د ∩ أ ب = {ص}

**برهن أن :** ١ الشكل س ص هـ حـ رباعي دائري

٢ ق(∠د ص ب) = ق(∠د ب س)

**البرهان:**

∵ حـ د قطر في الدائرة م ∴ ق(∠حـ س د) = ٩٠°

∵ حـ د ⊥ أ ب ∴ ق(∠حـ هـ أ) = ٩٠°

∵ ق(∠حـ س د) + ق(∠حـ ص أ) = ١٨٠° (وهما زاويتان متقابلتان ومتكاملتان)

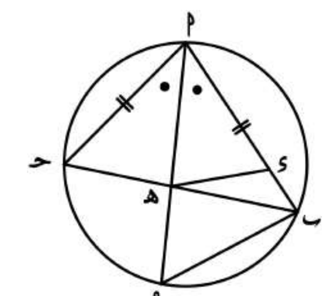
∴ الشكل س ص هـ ح رباعي دائري

∴ ق(∠ ب ص ء) الخارجة = ق(∠ س ح ء) المقابلة للمجاورة ①

∵ ق(∠ ح س ء) المحيطية = ق(∠ ء س ب) المحيطية ②

من ① ، ② ينتج أن : ق(∠ ء ص ب) = ق(∠ ء ب س)

**١٠ في الشكل المقابل :**




أ ء = أ ح ، $\overleftarrow{\text{أ و}}$ ينصف (∠ أ)

**أثبت أن :** الشكل ء ب و هـ رباعي دائري

**البرهان :** ∵ ΔΔ أ هـ ء ، أ هـ ح **فيهما :**

أ ء = أ ح ، ق(∠ ء أ هـ) = ق(∠ هـ أ ح) ، $\overline{\text{أ هـ}}$ ضلع مشترك

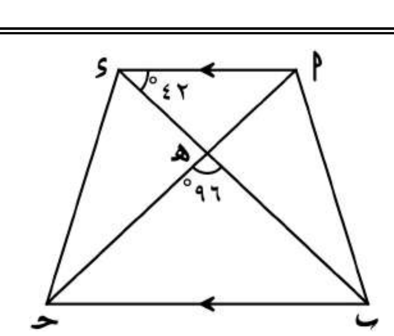
∴ Δ أ هـ ء ≡ Δ أ هـ ح وينتج أن : ق(∠ أ ء هـ) = ق(∠ ح) ①

∵ ق(∠ أ و ب) المحيطية = ق(∠ أ ح ب) المحيطية ②

من ① ، ② ينتج أن : ق(∠ أ ء هـ) الخارجة = ق(∠ و) المقابلة للمجاورة لها

∴ الشكل ء ب و هـ رباعي دائري

**١١ في الشكل المقابل :**




$\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$ ، ق(∠ أ ء ب) = °٤٢

، ق(∠ ب هـ ح) = °٩٦

**أثبت أن :** الشكل أ ب ح ء رباعي دائري

**البرهان :**

∵ $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$ ∴ ق(∠ ء ب ح) = ق(∠ أ ء ب) = °٤٢ **بالتبادل**

∵ Δ هـ ب ح : ق(∠ هـ ح ب) = °١٨٠ - (°٩٦ + °٤٢) = °٤٢

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ ح ب) = °٤٢ وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{\text{أ ب}}$

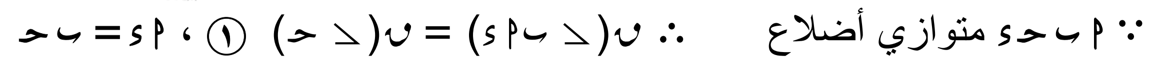
∴ الشكل أ ب ح ء رباعي دائري

**١٢ في الشكل المقابل :**

أ ب ح ء متوازي أضلاع ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ح ء}}$ حيث ب هـ = أ ء

**أثبت أن :** الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري

**البرهان :**



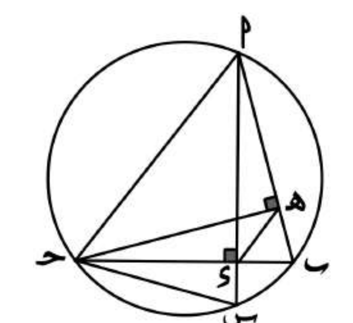
∵ أ ب ح ء متوازي أضلاع ∴ ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ح) ① ، أ ء = ب ح

∴ ب هـ = أ ء ∴ ب هـ = ب ح ∴ ق(∠ ب هـ ح) = ق(∠ ح) ②

من ① ، ② ينتج أن : ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ب هـ ء) وهما زاويتان مرسومتان على $\overline{\text{ب ء}}$

∴ الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري

**١٣ في الشكل المقابل :**




$\overline{حـ هـ} \perp \overline{ا ب}$ ، $\overleftrightarrow{ا ء} \perp \overline{ب حـ}$ ويقطع الدائرة في س

**برهن أن :** ① الشكل ا هـ ء حـ رباعي دائري

② $\overleftrightarrow{حـ ب}$ ينصف ( ∠ هـ حـ س )

**البرهان :**

∵ $\overline{حـ هـ} \perp \overline{ا ب}$ ∴ ق( ∠ ا هـ حـ ) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{ا ء} \perp \overline{ب حـ}$ ∴ ق( ∠ ا ء حـ ) = ٩٠°

∴ ق( ∠ ا هـ حـ ) = ق( ∠ ا ء حـ ) = ٩٠° وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{ا حـ}$

∴ الشكل ا هـ ء حـ رباعي دائري

∴ ق( ∠ هـ ا ء ) = ق( ∠ هـ حـ ء ) لأنهما مرسومتان على القاعدة $\overline{هـ ء}$ ①

∴ ق( ∠ ب ا س ) المحيطية = ق( ∠ ب حـ س ) المحيطية ②

من ① ، ② ينتج أن : ∴ ق( ∠ هـ حـ ء ) = ق( ∠ ب حـ س )

∴ $\overleftrightarrow{حـ ب}$ ينصف ( ∠ هـ حـ س )

---

## ★ رابعًا : العلاقة بين مماسات الدائرة :

### أولاً : أسئلة الاختيار من متعدد

① الزاوية المماسية هي زاوية محصورة بين …………

( ا ) وترين ( ب ) مماسين ( حـ ) وتر ومماس ( ء ) وتر وقطر

② مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هو نقطة تقاطع …………

( ا ) متوسطاته ( ب ) ارتفاعاته

( حـ ) منصفات زواياه الداخلة ( ء ) محاور تماثل أضلاعه

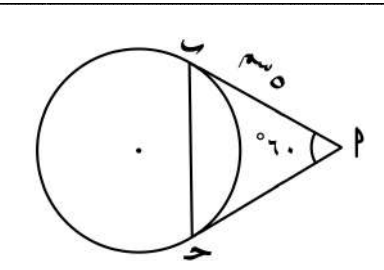
③ مركز الدائرة الخارجة لأي مثلث هو نقطة تقاطع …………

( ا ) منصفات زواياه الداخلة ( ب ) منصفات زواياه الخارجة

( حـ ) ارتفاعاته ( ء ) محاور تماثل أضلاعه

④ **في الشكل المقابل :** $\overleftrightarrow{ا ب}$ ، $\overleftrightarrow{ا حـ}$ مماس ، ق( ∠ ا ) = ٦٠°

، ا ب = ٥ سم **فإن :** طول $\overline{ب حـ}$ = ………. سم




( ا ) ٢,٥ ( ب ) ٥

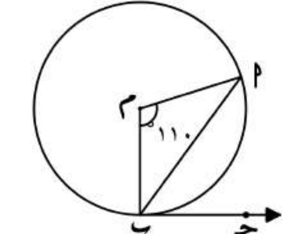
( حـ ) ١٠ ( ء ) ١٥

**٥ في الشكل المقابل :** ب حـ مماس للدائرة م

، ق(∠ا م ب) = ١١٠° **فإن :** ق(∠ا ب حـ) = ..........

( ا ) ٥٥° ( ب ) ١١٠°

( حـ ) ٧٠° ( ء ) ٢٢٠°



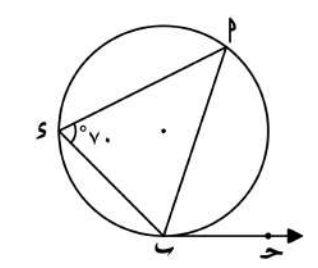

---

**٦ في الشكل المقابل :** ب حـ مماس للدائرة م

، ق(∠ء) = ٧٠° **فإن :** ق(∠ا ب حـ) = ..........

( ا ) ٣٥° ( ب ) ٧٠°

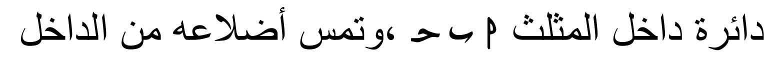
( حـ ) ١١٠° ( ء ) ١٤٠°




---

## ثانيًا : الأسئلة المقالية

**١ في الشكل المقابل :**


دائرة داخل المثلث ا ب حـ ،وتمس أضلاعه من الداخل

عند س ، ص ، ع ، فإذا كان : ا س = ٣سم

، س ب = ٤ سم ، ا حـ = ٨سم **أوجد :** طول ب حـ


**البرهان :**


∵ ب س ، ب ص قطعتان مماستان ∴ ب س = ب ص = ٤ سم

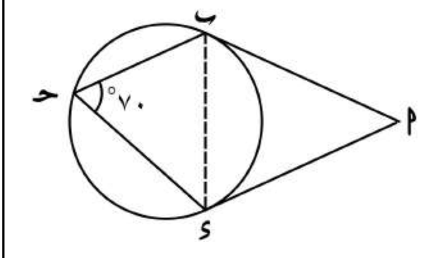
∵ ا س ، ا ع قطعتان مماستان ∴ ا س = ا ع = ٣سم

∴ ا حـ = ٨سم ∴ ع حـ = ٨ - ٣ = ٥سم

∵ حـ ص ، حـ ع قطعتان مماستان ∴ حـ ص = حـ ع = ٥سم

∴ ب حـ = ٤ + ٥ = **٩ سم**

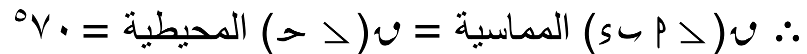
**٢ في الشكل المقابل :**




ا ب ، ا ء قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، ء

، ق(∠ حـ) = ٧٠° **أوجد :** ق(∠ ا)

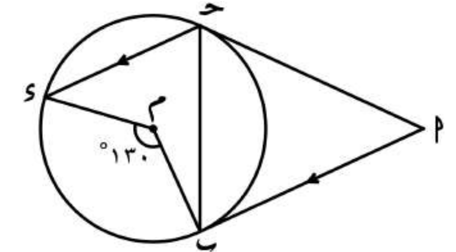
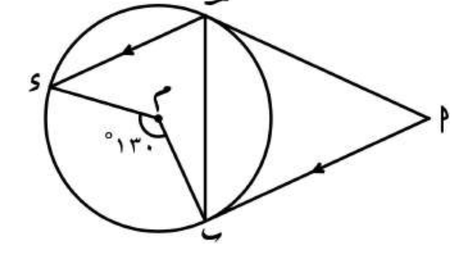
**البرهان :** ∵ ا ب مماس للدائرة عند ب


∴ ق(∠ ا ب ء) المماسية = ق(∠ حـ) المحيطية = ٧٠°

∵ ا ب ، ا ء قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، ء ∴ ا ب = ا ء

∴ ق(∠ ا ب ء) = ق(∠ ا ء ب) = ٧٠°

∴ Δ ا ب ء : ق(∠ ا) = ١٨٠° - (٧٠° + ٧٠°) = **٤٠°**

**٣ في الشكل المقابل :**

أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ

، أب // حـ ء ، ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

**❶ أثبت أن :** حـ ب ينصف (∠ أ حـ ء)

**❷ أوجد :** ق(∠ أ)

**البرهان :** ∵ ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

∴ ق(∠ ب حـ ء) المحيطية = ½ ق(∠ ب م ء) المركزية = ٦٥°

∵ أب // حـ ء ∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٦٥° **بالتبادل**

∵ أب ، أحـ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ ∴ أب = أحـ

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ أ ب حـ) = ٦٥°

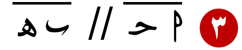
∴ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ ب حـ ء) = ٦٥° ∴ حـ ب ينصف (∠ أ حـ ء)

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠°

**٤ في الشكل المقابل :**

أب ، أحـ مماسان للدائرة عند ب ، حـ

، ق(∠ أ) = ٥٠° ، ق(∠ حـ ء هـ) = ١١٥°

**أثبت أن : ❶**  ب حـ ينصف (∠ أ ب هـ) **❷** حـ ب = حـ هـ

**❸** أحـ // ب هـ

**البرهان :** ∵ الشكل ب حـ ء هـ رباعي دائري ∴ ق(∠ حـ ب هـ) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥°

∵ أب ، أحـ مماسان للدائرة عند ب ، حـ ∴ أب = أحـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = ٦٥°

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ حـ ب هـ) = ٦٥° ∴ ب حـ ينصف (∠ أ ب هـ) ①

∵ ق(∠ ب هـ حـ) المحيطية = ق(∠ أ ب حـ) المماسية = ٦٥° (مشتركتان في ⌒ب حـ)

∴ △ ب حـ هـ فيه : ق(∠ حـ ب هـ) = ق(∠ حـ هـ ب) = ٦٥° ∴ حـ ب = حـ هـ ②

∵ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ حـ ب هـ) = ٦٥° وهما في وضع التبادل ∴ أحـ // ب هـ ③

**٥ في الشكل المقابل :**



أو مماس للدائرة عند أ

، أو // ء هـ

**برهن أن :** الشكل ء هـ ب حـ رباعي دائري

**البرهان :** ∵ $\overleftarrow{أو}$ // $\overline{ءهـ}$ ∴ ق(∠ و أ هـ) = ق(∠ أ هـ ء) بالتبادل (١)

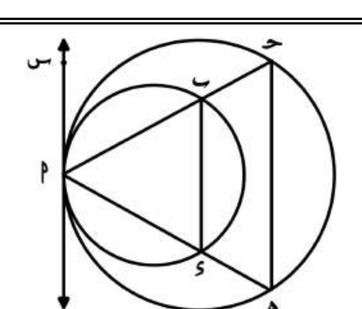
∵ $\overleftrightarrow{أو}$ مماس للدائرة عند أ ∴ ق(∠ و أ ب) المماسية = ق(∠ أ حـ ب) المحيطية (٢)

**من** (١) ، (٢) : ق(∠ أ هـ ء) الخارجة = ق(∠ أ حـ ب) المقابلة للمجاورة

∴ الشكل ء هـ ب حـ رباعي دائري



**٦ في الشكل المقابل :**



دائرتان متماستان من الداخل في أ

، $\overleftrightarrow{أس}$ مماس مشترك لهما

**أثبت أن :** $\overline{بء}$ // $\overline{حـهـ}$

**البرهان :** ∵ $\overleftrightarrow{أس}$ مماس مشترك للدائرتين

∴ في الدائرة الصغرى : ق(∠ ب ء أ) المحيطية = ق(∠ ب أ س) المماسية (١)

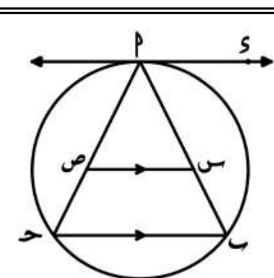
∴ في الدائرة الكبرى : ق(∠ حـ هـ أ) المحيطية = ق(∠ حـ أ س) المماسية (٢)

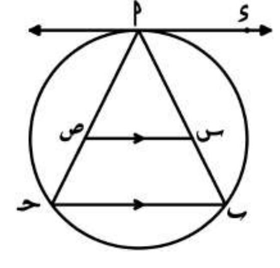
من (١) ، (٢) ينتج أن : ق(∠ ب ء أ) = ق(∠ حـ هـ أ) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{بء}$ // $\overline{حـهـ}$



**٧ في الشكل المقابل :**





أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة عند أ

، س ∈ $\overline{أب}$ ، ص ∈ $\overline{أحـ}$ حيث $\overline{سص}$ // $\overline{بحـ}$

**أثبت أن :** $\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة التي تمر بالنقط أ ، س ، ص

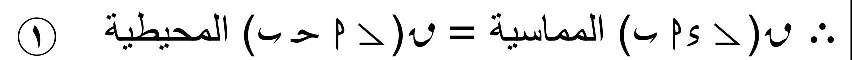
**البرهان :** ∵ $\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة عند أ

∴ ق(∠ ء أ ب) المماسية = ق(∠ أ حـ ب) المحيطية (١)

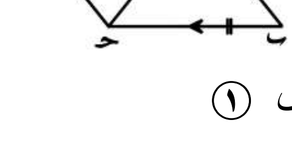
∵ $\overline{سص}$ // $\overline{بحـ}$ ∴ ق(∠ أ ص س) = ق(∠ أ حـ ب) بالتناظر (٢)

**من** (١) ، (٢) ينتج أن : ق(∠ ء أ س) = ق(∠ أ ص س)

∴ $\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص



**٨** أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه : أ حـ = ب حـ



**أثبت أن :** $\overleftarrow{حـء}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

**البرهان :** ∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$ ∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ أ حـ ء) بالتبادل (١)

∵ أ حـ = ب حـ ∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ب أ حـ) (٢)

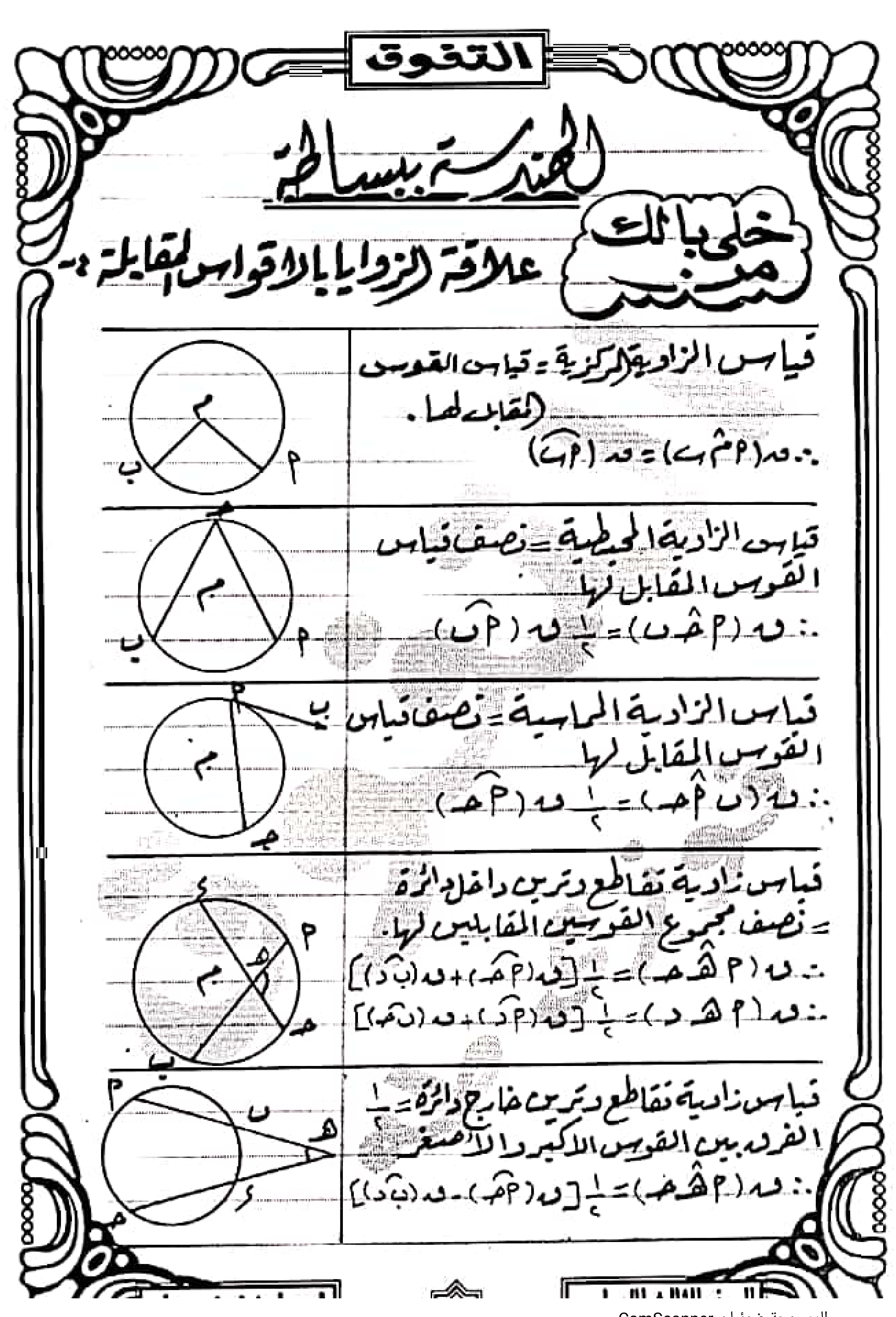
من (١) ، (٢) ينتج أن : ق(∠ أ حـ ء) = ق(∠ ب)

∴ $\overleftarrow{حـء}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ









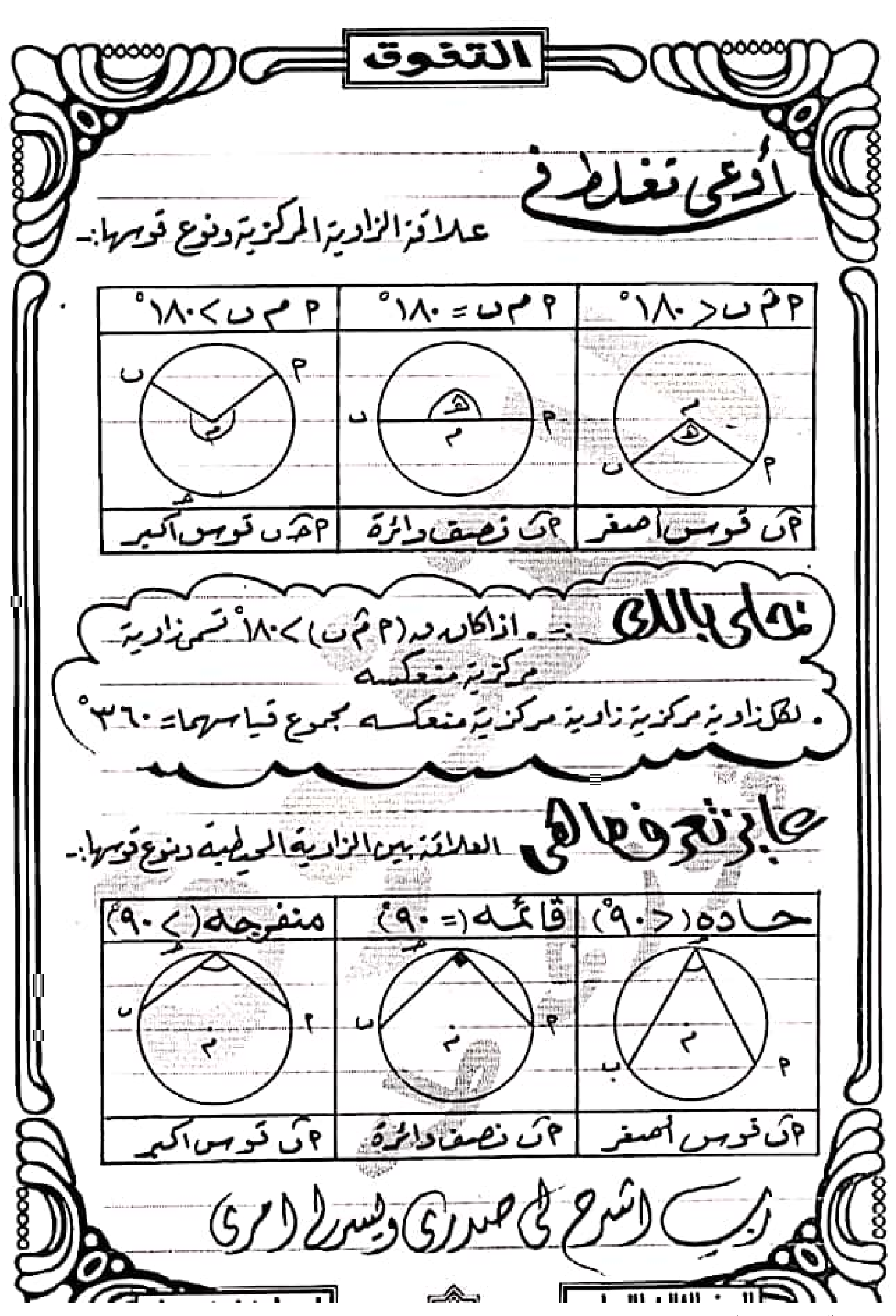
# التفوق

## الهندسة ببساطة

خلي بالك من

### علاقة الزوايا بالأقواس المقابلة :-

| القاعدة | الشكل |
|---|---|
| قياس الزاوية المركزية = قياس القوس المقابل لها. <br> ∴ ق(∠أ م ب) = ق(⌢أب) | م ، أ ، ب |
| قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس القوس المقابل لها <br> ∴ ق(∠أ جـ ب) = ½ ق(⌢أب) | جـ ، م ، أ ، ب |
| قياس الزاوية المماسية = نصف قياس القوس المقابل لها <br> ∴ ق(∠ب أ جـ) = ½ ق(⌢أجـ) | أ ، ب ، م ، جـ |
| قياس زاوية تقاطع وترين داخل دائرة = نصف مجموع القوسين المقابلين لها. <br> ∴ ق(∠أ هـ جـ) = ½ [ق(⌢أجـ) + ق(⌢بد)] <br> ∴ ق(∠أ هـ د) = ½ [ق(⌢أد) + ق(⌢بجـ)] | د ، أ ، هـ ، م ، جـ ، ب |
| قياس زاوية تقاطع وترين خارج دائرة = ½ الفرق بين القوس الأكبر والأصغر <br> ∴ ق(∠أ هـ جـ) = ½ [ق(⌢أجـ) − ق(⌢بد)] | أ ، ب ، هـ ، د ، جـ |



# التفوق

## أدعي تتعلم في

علاقة الزاوية المركزية ونوع قوسها:-

| ق(∠أ م ب) < ١٨٠° | ق(∠أ م ب) = ١٨٠° | ق(∠أ م ب) > ١٨٠° |
| --- | --- | --- |
| أب قوس أصغر | أب نصف دائرة | أجـب قوس أكبر |

## خلي بالك :-

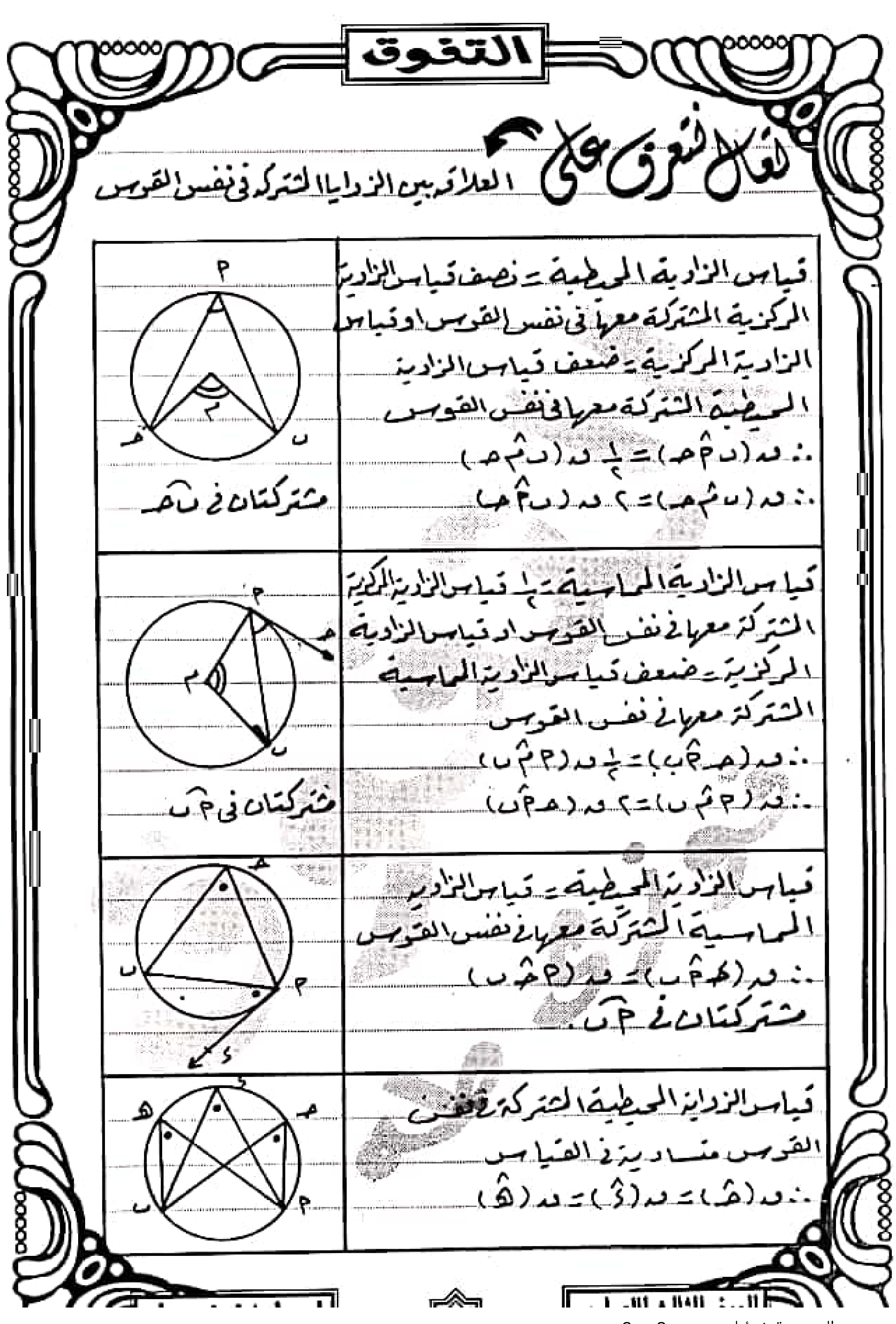
- إذا كان ق(∠أ م ب) > ١٨٠° تسمى زاوية مركزية منعكسة
- لكل زاوية مركزية زاوية مركزية منعكسة مجموع قياسهما = ٣٦٠°

## عايز تعرف ما هي

العلاقة بين الزاوية المحيطية ونوع قوسها:-

| حادة (< ٩٠°) | قائمة (= ٩٠°) | منفرجة (> ٩٠°) |
| --- | --- | --- |
| أب قوس أصغر | أب نصف دائرة | أب قوس أكبر |

رب اشرح لي صدري ويسر لي أمري





# تعال نتعرف على

العلاقة بين الزوايا المشتركة في نفس القوس

قياس الزاوية المحيطية = نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس أو قياس الزاوية المركزية = ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها في نفس القوس

∴ ق(∠ب أ جـ) = ½ ق(∠ب م جـ)

∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠ب أ جـ)

مشتركتان في ⌒ب جـ

قياس الزاوية المماسية = ½ قياس الزاوية المركزية المشتركة معها في نفس القوس أو قياس الزاوية المركزية = ضعف قياس الزاوية المماسية المشتركة معها في نفس القوس

∴ ق(∠جـ أ ب) = ½ ق(∠أ م ب)

∴ ق(∠أ م ب) = ٢ ق(∠جـ أ ب)

مشتركتان في ⌒أ ب

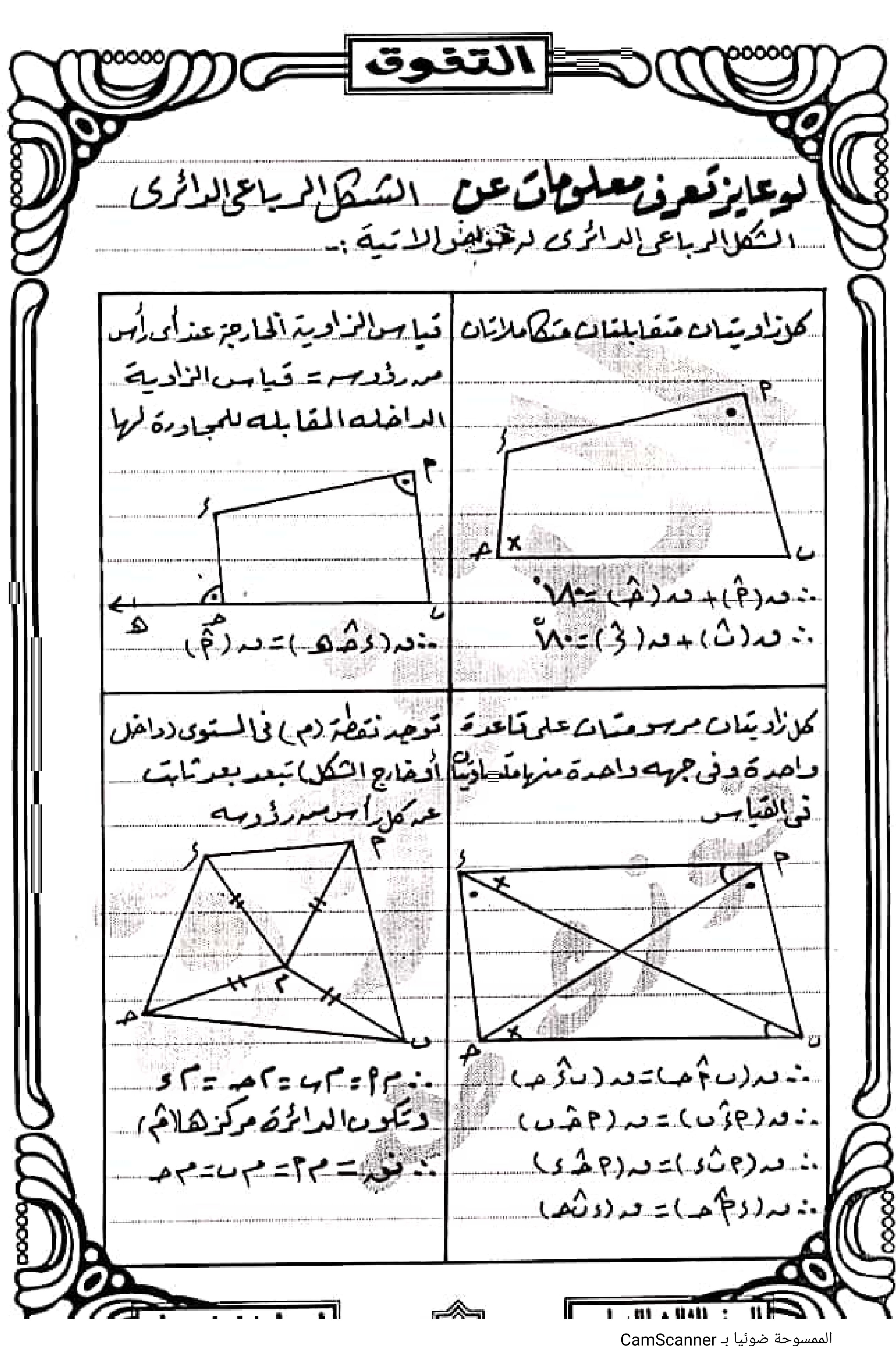
قياس الزاوية المحيطية = قياس الزاوية المماسية المشتركة معها في نفس القوس

∴ ق(∠جـ أ ب) = ق(∠أ جـ ب)

مشتركتان في ⌒أ ب

قياس الزوايا المحيطية المشتركة في نفس القوس متساوية في القياس

∴ ق(∠جـ) = ق(∠د) = ق(∠هـ)

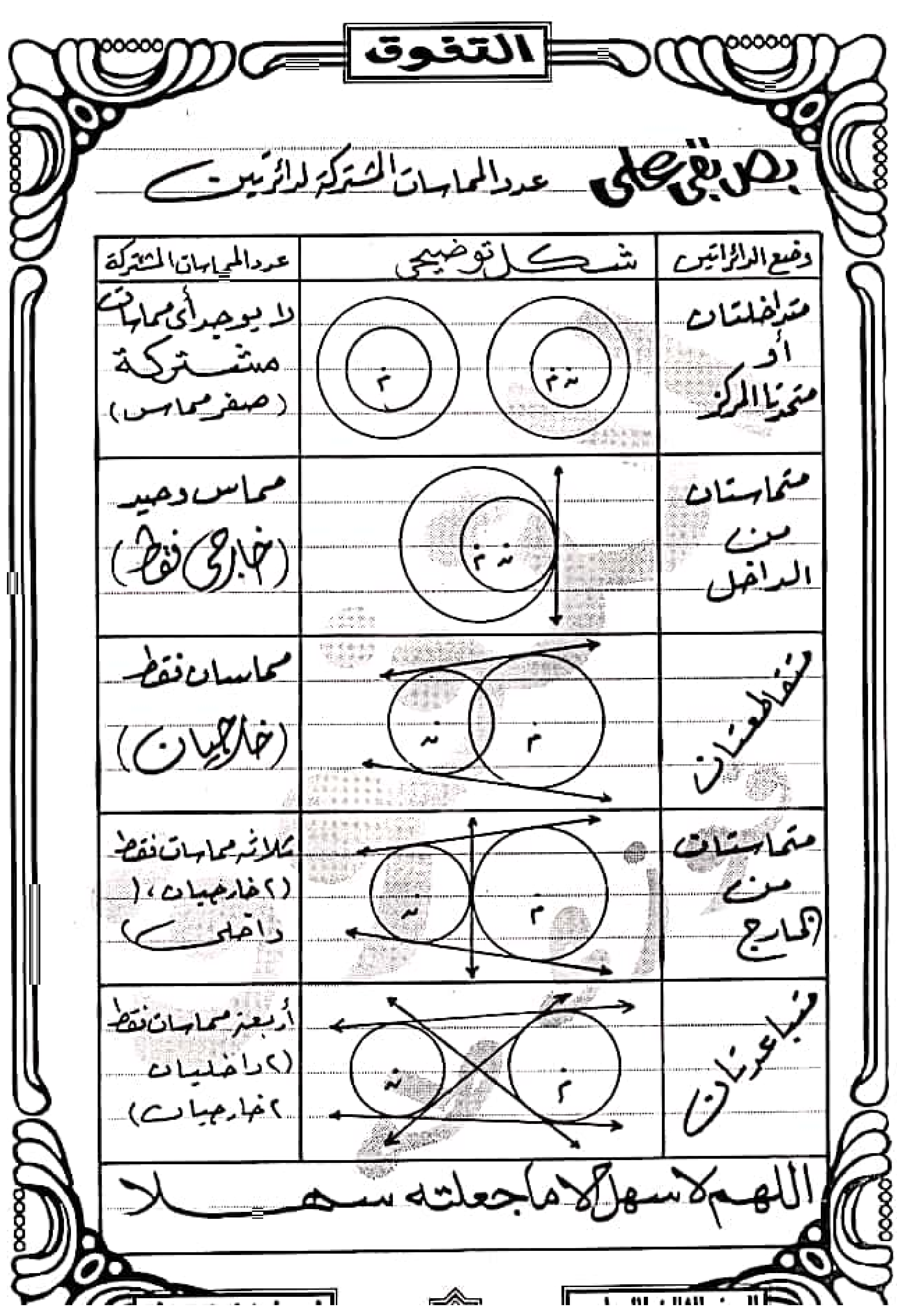


# التفوق

## لو عايز تعرف معلومات عن الشكل الرباعي الدائري

الشكل الرباعي الدائري له الخواص الآتية :-

| كل زاويتان متقابلتان متكاملتان | قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوسه = قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها |
| --- | --- |
| ∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠° <br> ∴ ق(∠ب) + ق(∠د) = ١٨٠° | ∴ ق(∠د جـ هـ) = ق(∠أ) |
| كل زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة منها متساويتان في القياس | توجد نقطة (م) في المستوى (داخل أو خارج الشكل) تبعد بعد ثابت عن كل رأس من رؤوسه |
| ∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب د جـ) <br> ∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠أ جـ ب) <br> ∴ ق(∠أ ب د) = ق(∠أ جـ د) <br> ∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠د ب جـ) | ∴ م أ = م ب = م جـ = م د <br> وتكون الدائرة مركزها (م) <br> ∴ نق = م أ = م ب = م جـ |

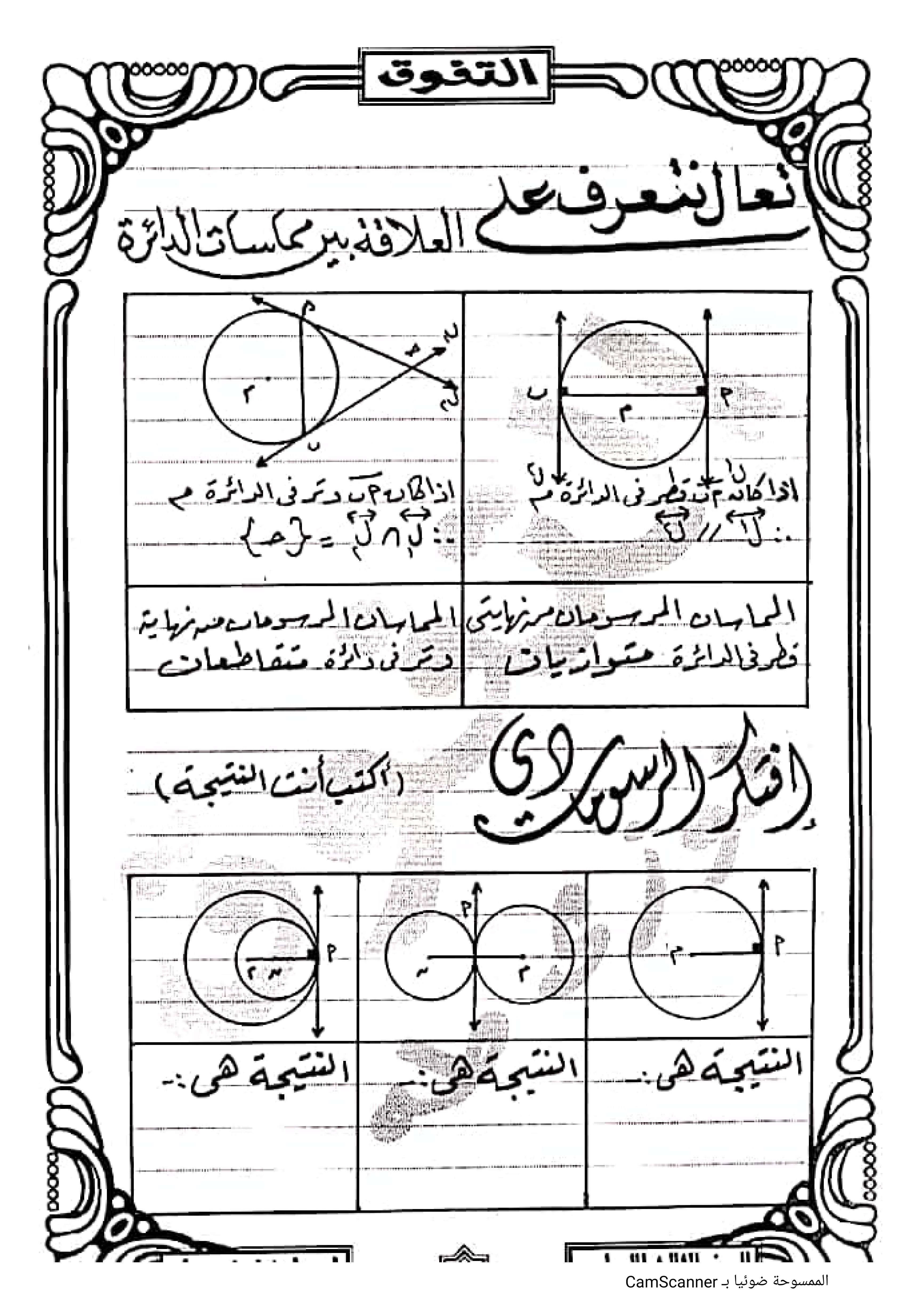


# التفوق

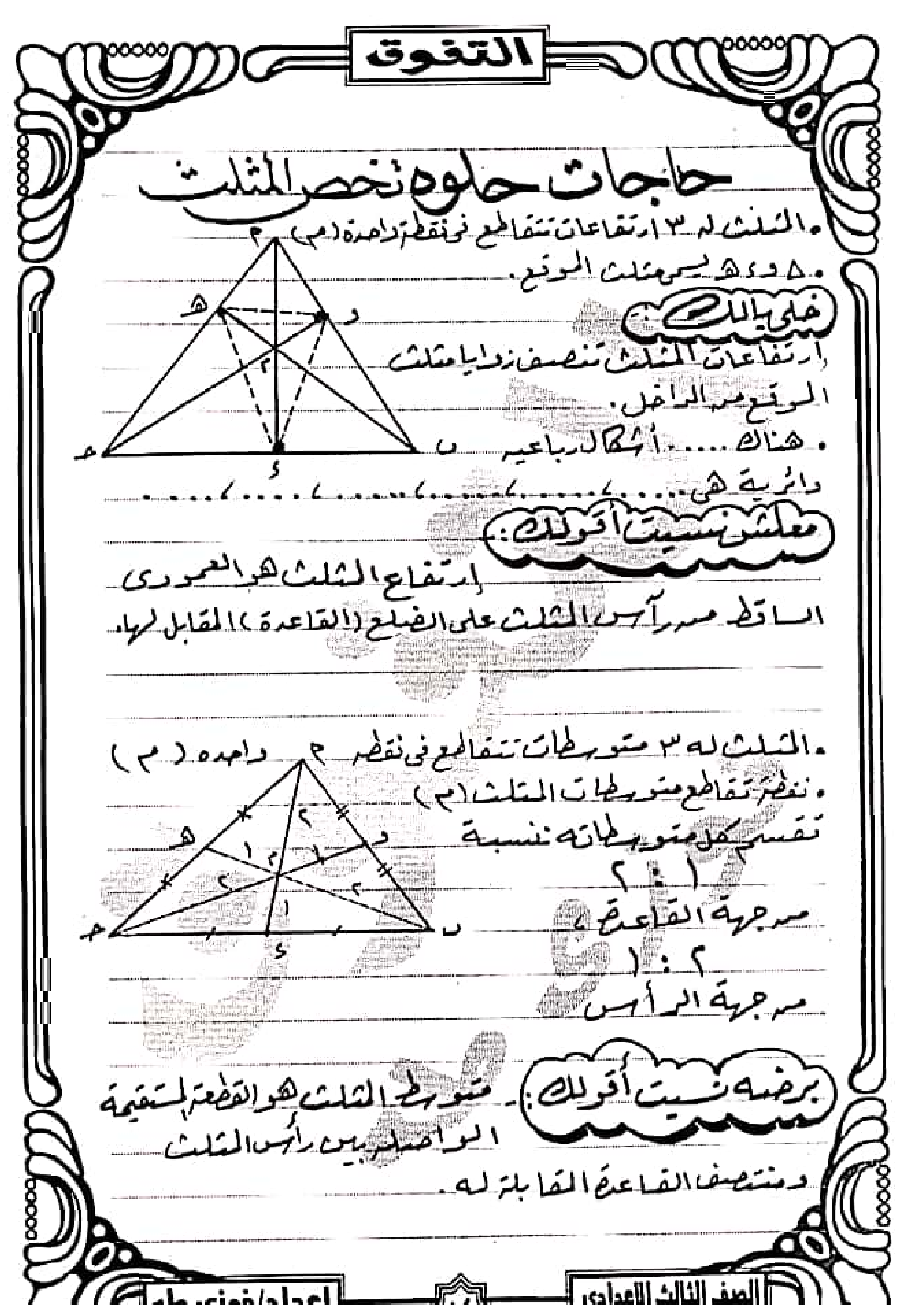
## بص بقى علي عدد المماسات المشتركة لدائرتين

| وضع الدائرتين | شكل توضيحي | عدد المماسات المشتركة |
|---|---|---|
| متداخلتان أو متحدتا المركز | م / ن م | لا يوجد أي مماسات مشتركة (صفر مماس) |
| متماستان من الداخل | ن م | مماس وحيد (خارجي فقط) |
| متقاطعتان | ن / م | مماسان فقط (خارجيان) |
| متماستان من الخارج | ن / م | ثلاثة مماسات فقط (٢ خارجيات، ١ داخلي) |
| متباعدتان | ن / م | أربعة مماسات فقط (٢ داخليات ٢ خارجيات) |

اللهم لا سهل إلا ما جعلته سهلا



التفوق
تعال نتعرف على
العلاقة بين مماسات الدائرة
اذا كانت أب قطر فى الدائرة م
اذا كانت أب وتر فى الدائرة م
المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة متوازيان
المماسات المرسومات من نهاية وتر فى دائرة متقاطعان
(أكتب أنت النتيجة)
النتيجة هى :-
النتيجة هى :-
النتيجة هى :-



# حاجات حلوه تخص المثلث

- المثلث له ٣ ارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة (م)
- △ د ز هـ يسمى مثلث الموقع.

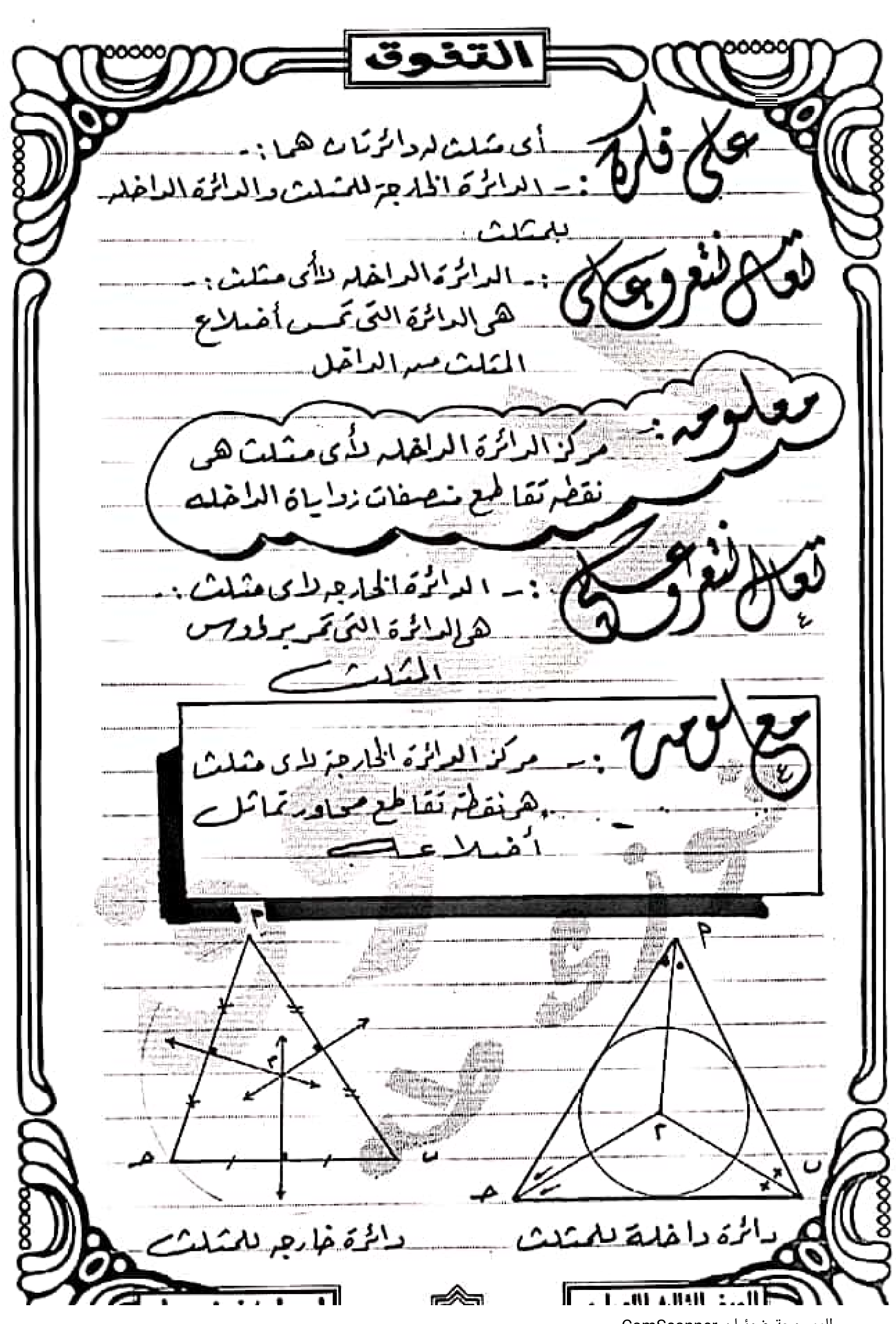
**خلي بالك:**
ارتفاعات المثلث تنصف زوايا مثلث الموقع من الداخل.

- هناك ...... أشكال رباعية دائرية هي ......،......،......،......،......،......

**معلش نسيت أقولك:**
ارتفاع المثلث هو العمودي الساقط من رأس المثلث على الضلع (القاعدة) المقابل لها.

- المثلث له ٣ متوسطات تتقاطع في نقطة واحدة (م)
- نقطة تقاطع متوسطات المثلث (م) تقسم كل متوسطاته بنسبة
١ : ٢ من جهة القاعدة ،
٢ : ١ من جهة الرأس

**برضه نسيت أقولك:** متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المثلث ومنتصف القاعدة المقابلة له.





**على فكرة:** أي مثلث له دائرتان هما: - الدائرة الخارجة للمثلث والدائرة الداخلة للمثلث.

**تعال نتعرف على:** - الدائرة الداخلة لأي مثلث: - هي الدائرة التي تمس أضلاع المثلث من الداخل

**معلومة:** - مركز الدائرة الداخلة لأي مثلث هي نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة

**تعال نتعرف على:** - الدائرة الخارجة لأي مثلث: - هي الدائرة التي تمر برؤوس المثلث

**معلومة:** - مركز الدائرة الخارجة لأي مثلث هي نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه.



دائرة خارجة للمثلث — دائرة داخلة للمثلث



# التفوق

## أقولك سر خطير

في المثلث المتساوي الأضلاع نقطة تقاطع ارتفاعاته هي نقطة تقاطع متوسطاته هي نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة هي نقطة تقاطع محاور أضلاعه.

**يعني** :- أ د يسمى :- متوسط وارتفاع ومنصف زاوية أ ومحور تماثل ب جـ وكذلك ب هـ ، جـ و وتكون نقطة م هي :- مركز الدائرة الداخلة وكذلك مركز الدائرة الخارجة للمثلث

**كلام في سرك** :- طول نصف قطر الدائرة الداخلة للمثلث المتساوي الأضلاع = نصف طول نصف قطر الدائرة الخارجة له

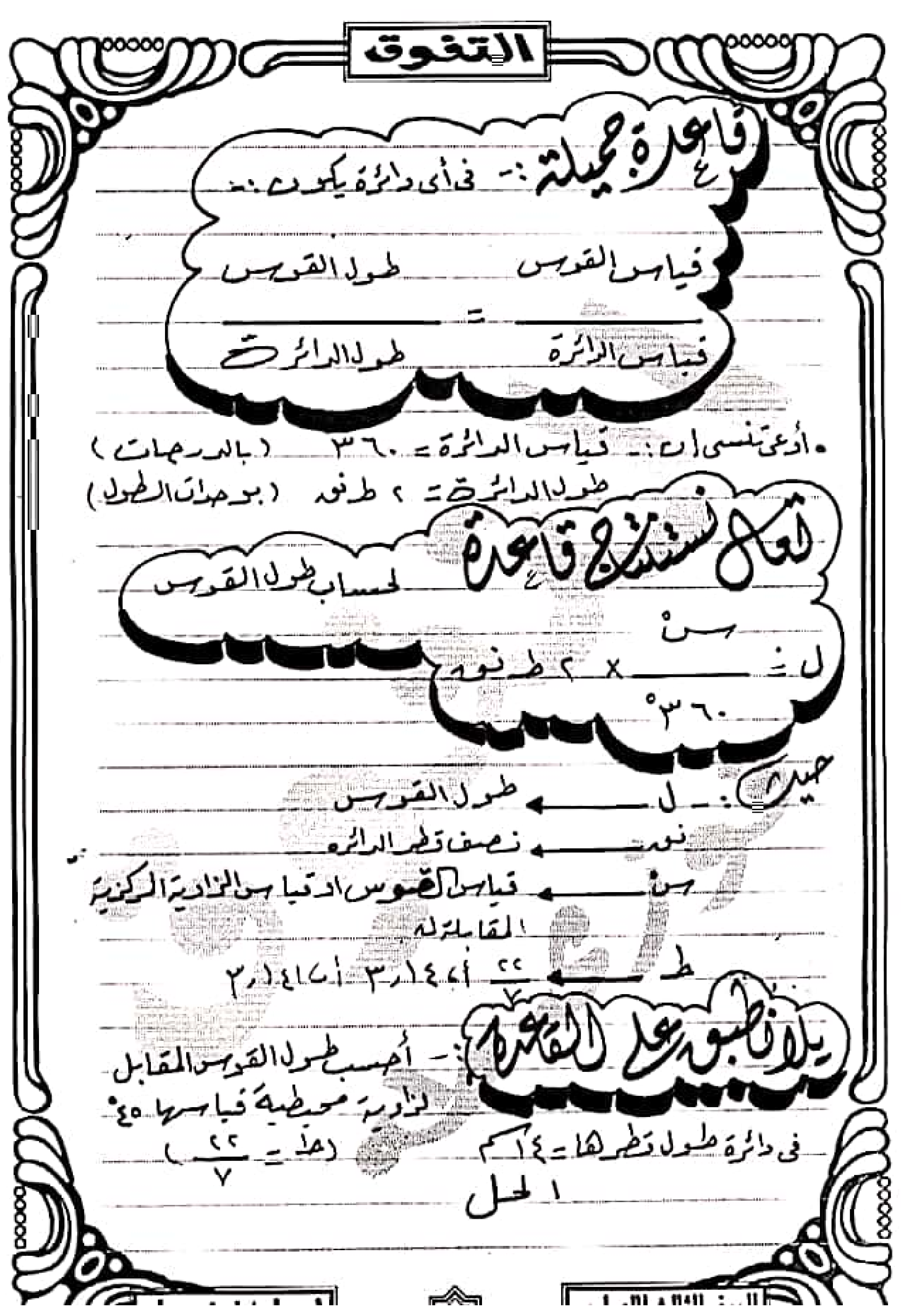
∴ $نق_1 = \frac{1}{2} نق_2$ أو $نق_2 = 2\, نق_1$

**حيث** :

$نق_1$ ← نصف قطر الدائرة الداخلة في المثلث المتساوي الأضلاع

$نق_2$ ← " " " الخارجة

**Sorre نسيت أقولك** :- محور تماثل أي ضلع هو المستقيم العمودي عليه من منتصفه





## قاعدة جميلة :- في أي دائرة يكون :-

قياس القوس / قياس الدائرة = طول القوس / طول الدائرة

• أوعى تنسى إن :- قياس الدائرة = ٣٦٠° (بالدرجات)

طول الدائرة = ٢ ط نق (بوحدات الطول)

## تعال نستنتج قاعدة لحساب طول القوس

ل = س° / ٣٦٠° × ٢ ط نق

حيث :- ل ← طول القوس

نق ← نصف قطر الدائرة

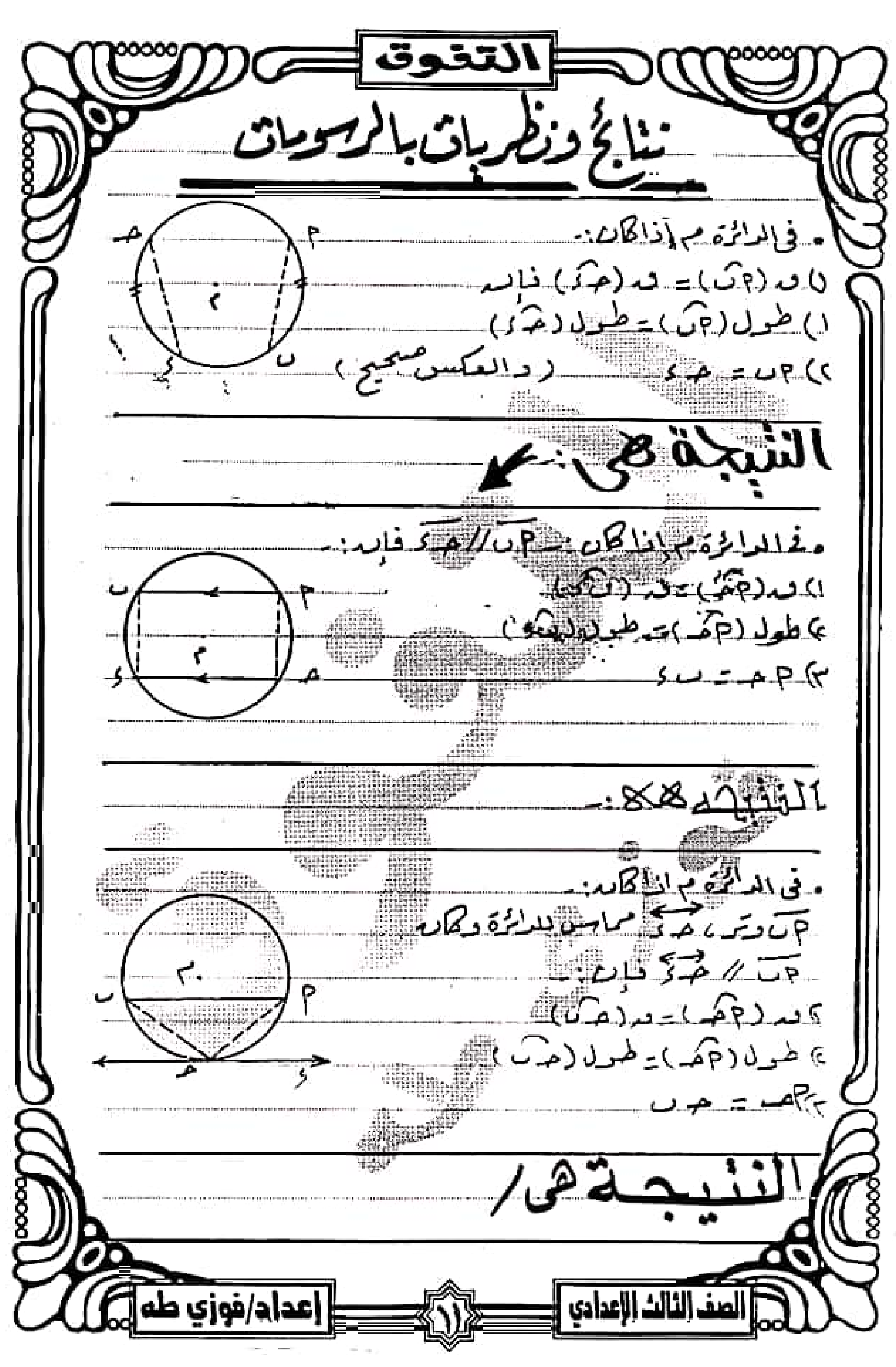
س ← قياس القوس أو قياس الزاوية المركزية المقابلة له

ط ← ٢٢/٧ أ، ٣,١٤ أ، ٣,١٤٢

## يلا نطبق على القاعدة :-

أحسب طول القوس المقابل لزاوية محيطية قياسها ٤٥° في دائرة طول قطرها = ١٤ سم (ط = ٢٢/٧)

الحل



# التفوق

## نتائج ونظريات بالرسومات

• في الدائرة م إذا كان:

1) ق(أب) = ق(جـ د) فإنه

1) طول (أب) = طول (جـ د)

2) أب = جـ د (والعكس صحيح)

**النتيجة هي:**

• في الدائرة م إذا كان أب // جـ د فإنه:

1) ق(أجـ) = ق(ب د)

2) طول (أجـ) = طول (ب د)

3) أجـ = ب د

**النتيجة هي:**

• في الدائرة م إذا كان:

أب وتر، جـ د مماس للدائرة وكان

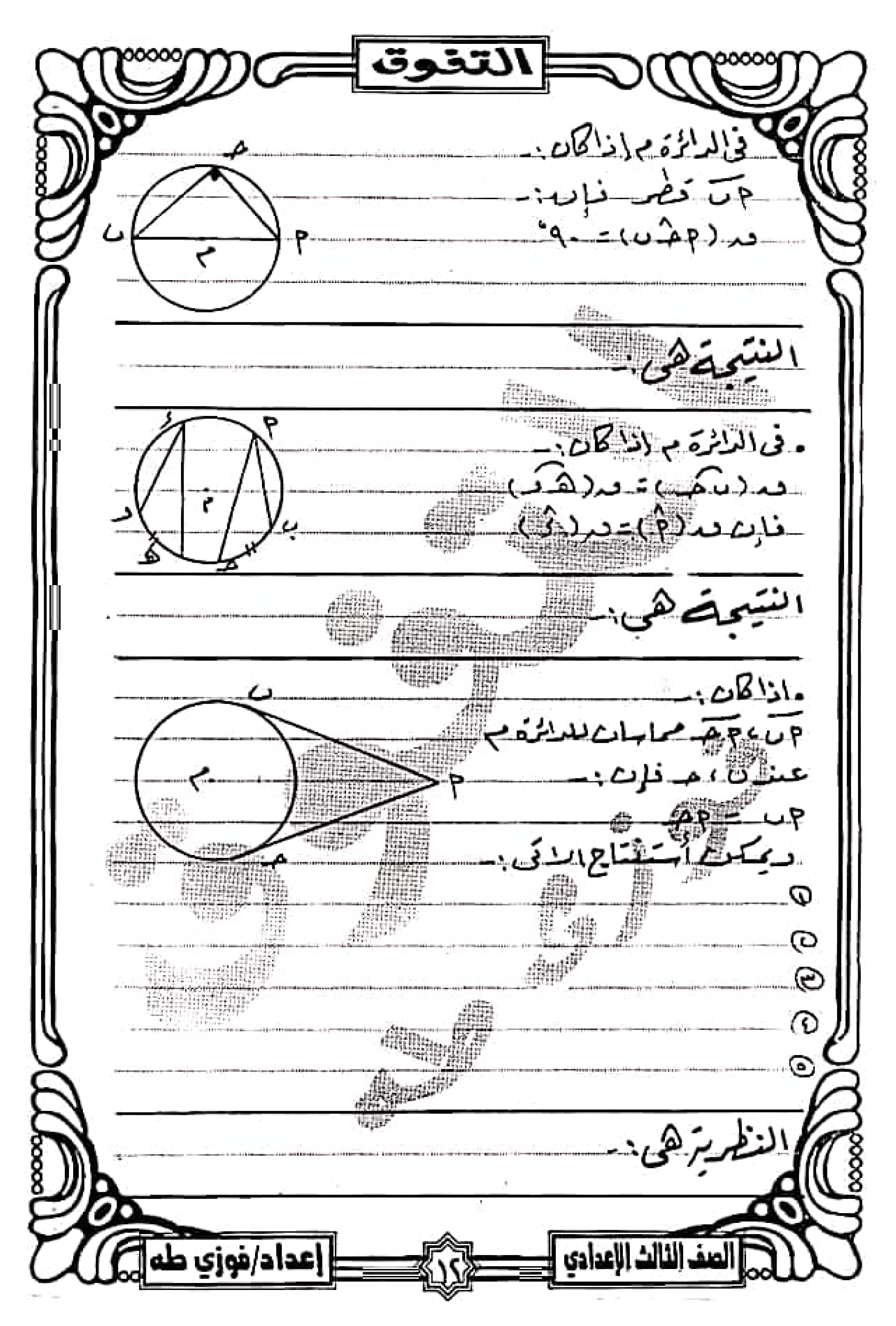
أب // جـ د فإن:

1) ق(أجـ) = ق(جـ ب)

2) طول (أجـ) = طول (جـ ب)

3) أجـ = جـ ب

**النتيجة هي/**





في الدائرة م إذا كان:
أب قطر فإن:
ق(∠أجـب) = 90°

النتيجة هي:

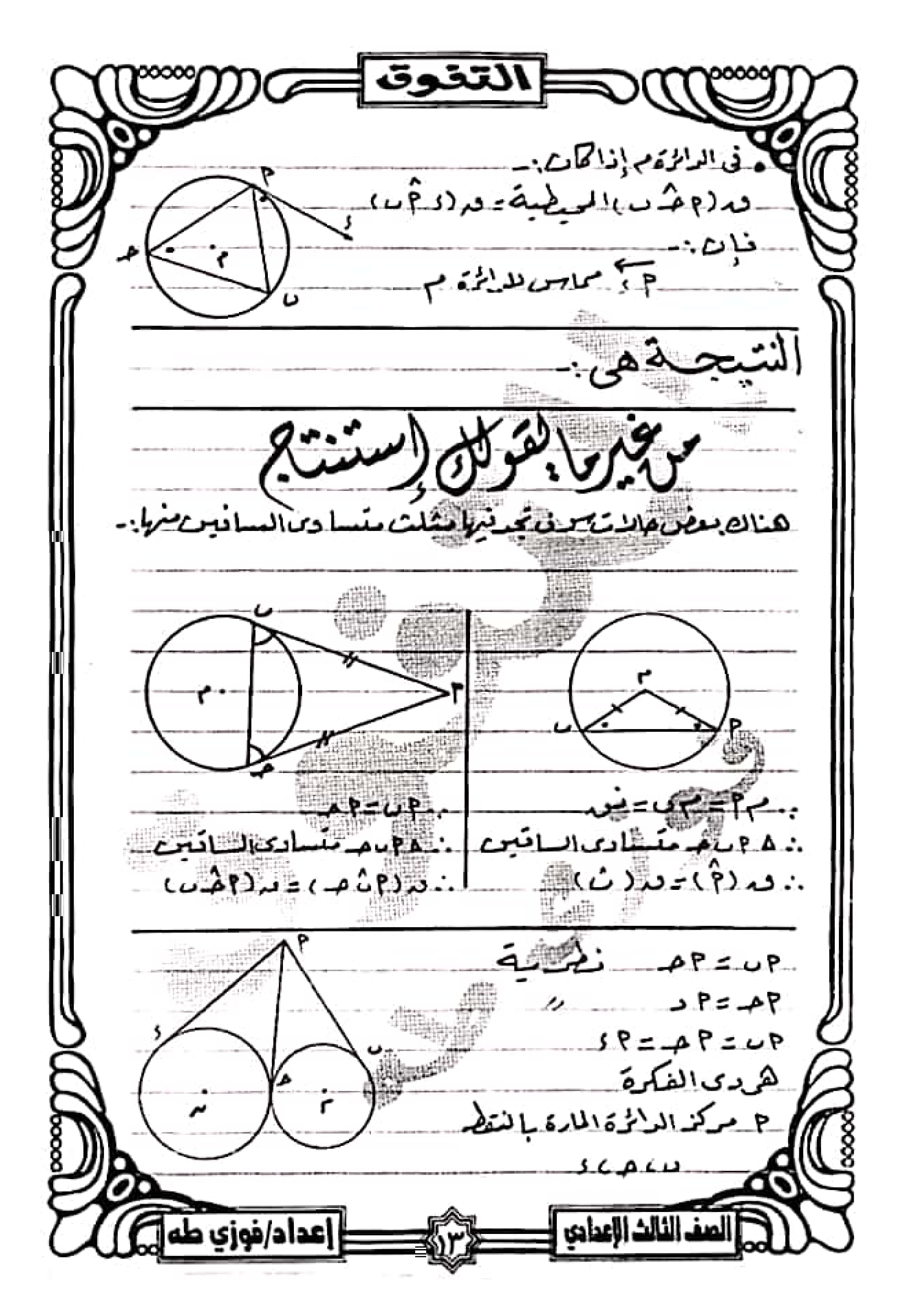
في الدائرة م إذا كان:
ق(بجـ⌒) = ق(هـو⌒)
فإن ق(∠أ) = ق(∠د)

النتيجة هي:

إذا كان:
أب، أجـ مماسان للدائرة م
عند ب، جـ فإن:
أب = أجـ
ويمكن استنتاج الآتي:

1)
2)
3)
4)
5)

النظرية هي:





• في الدائرة م إذا كان :-

ق(∠أ حـ ب) المحيطية = ق(∠د أ ب)

فإن :-

أد مماس للدائرة م

## النتيجة هي :-

## من غير ما اقولك إستنتج

هناك بعض حالات يمكن تجد فيها مثلث متساوي الساقين منها :-

∵ م أ = م ب = نق

∴ △ م أ ب متساوي الساقين

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب)

∵ أ ب = أ حـ

∴ △ أ ب حـ متساوي الساقين

∴ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠أ ب حـ)

أ ب = أ حـ نظرية

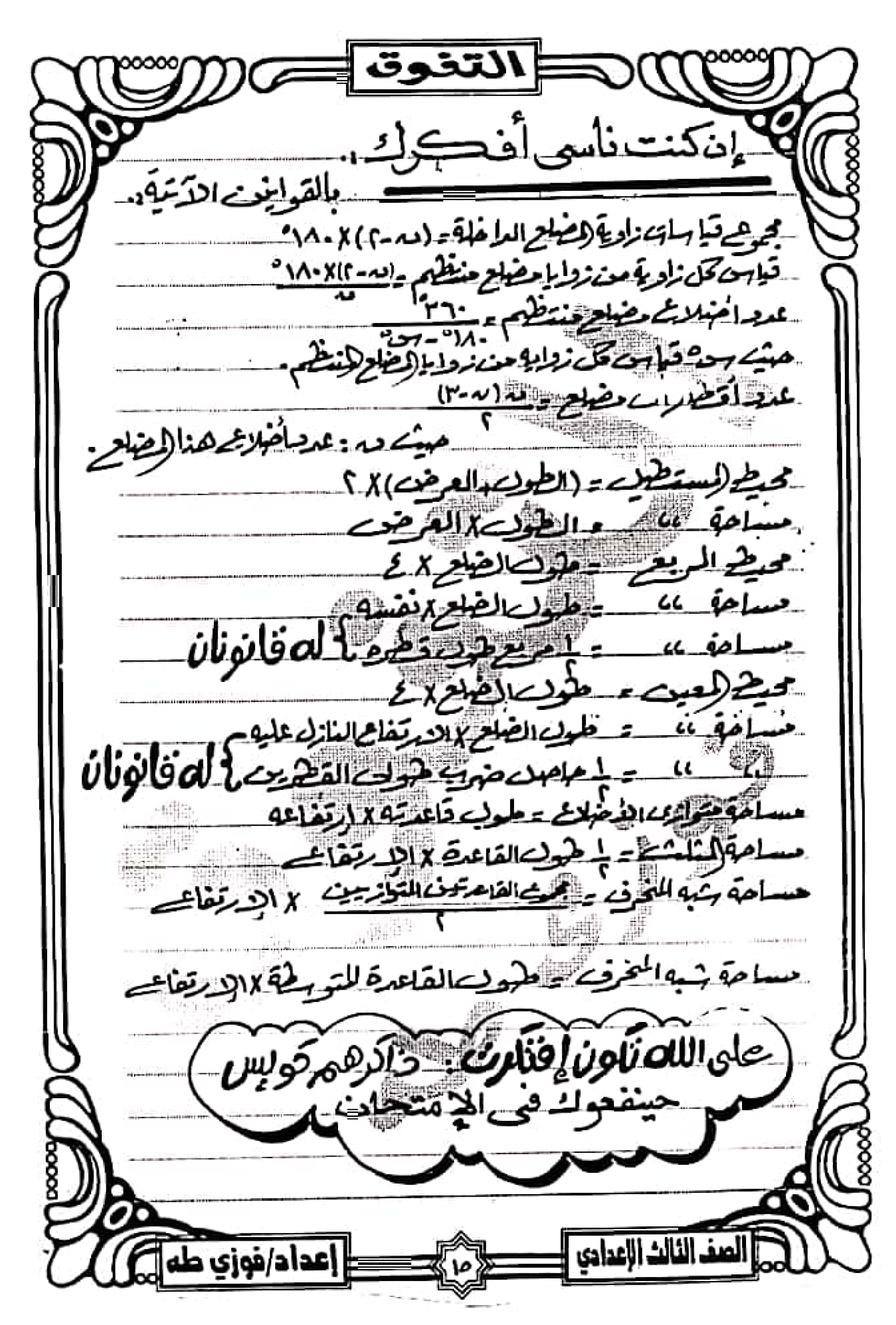
أ حـ = أ د "

أ ب = أ حـ = أ د

هي دي الفكرة

أ مركز الدائرة المارة بالنقط

ب ، حـ ، د





## إن كنت ناسي أفكرك،

بالقوانين الآتية:

مجموع قياسات زوايا المضلع الداخلة = (ن - ٢) × ١٨٠°

قياس كل زاوية من زوايا مضلع منتظم = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠°}{ن}$

عدد أضلاع مضلع منتظم = $\frac{٣٦٠°}{١٨٠° - س°}$

حيث س° قياس كل زاوية من زوايا المضلع المنتظم.

عدد أقطار مضلع = $\frac{ن (ن - ٣)}{٢}$

حيث ن = عدد أضلاع هذا المضلع.

محيط المستطيل = (الطول + العرض) × ٢

مساحة " = الطول × العرض

محيط المربع = طول الضلع × ٤

مساحة " = طول الضلع × نفسه

مساحة " = $\frac{١}{٢}$ مربع طول قطره } له قانونان

محيط المعين = طول الضلع × ٤

مساحة " = طول الضلع × الارتفاع النازل عليه

" = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولي القطرين } له قانونان

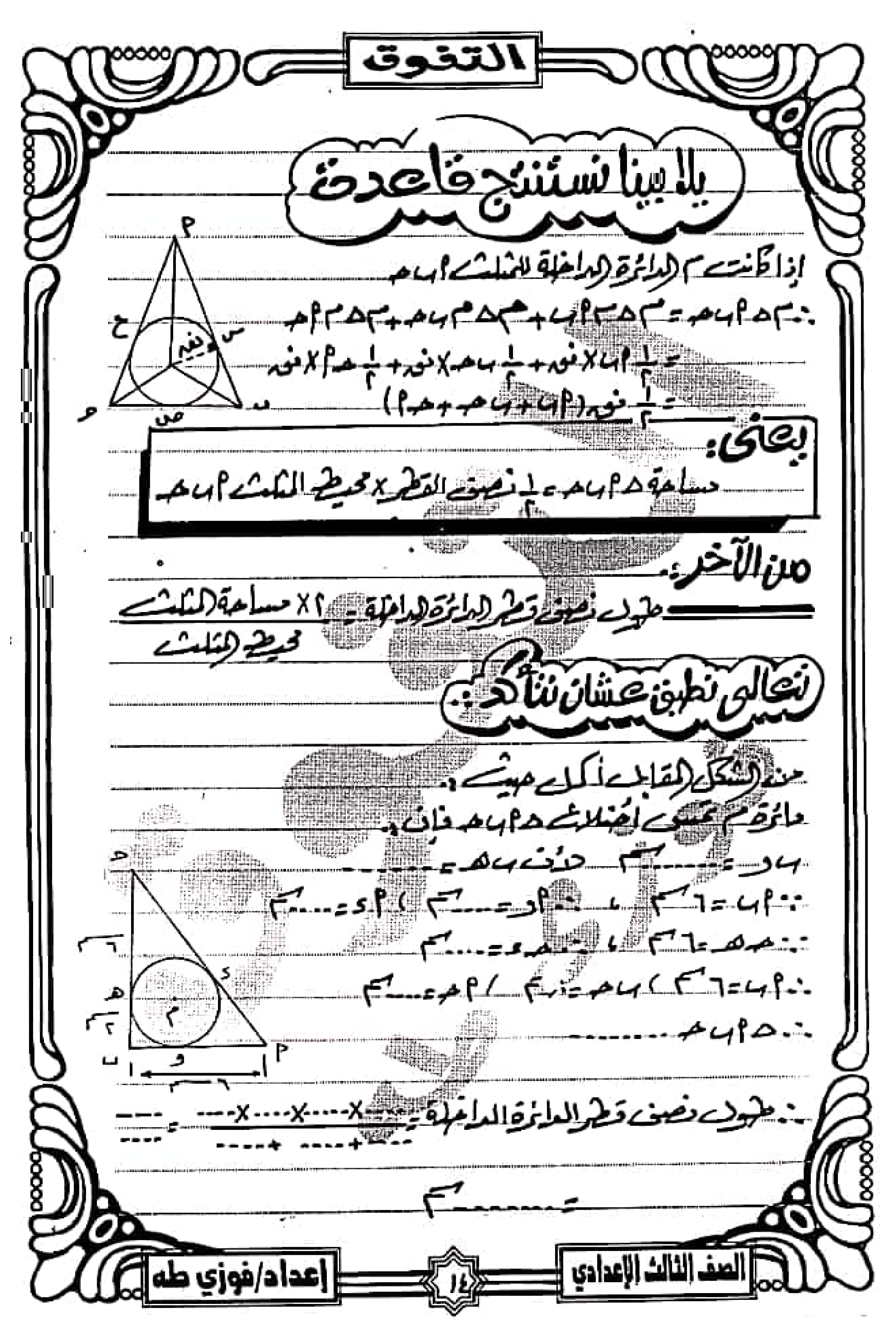
مساحة متوازي الأضلاع = طول قاعدته × ارتفاعه

مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ طول القاعدة × الارتفاع

مساحة شبه المنحرف = $\frac{\text{مجموع القاعدتين المتوازيتين}}{٢}$ × الارتفاع

مساحة شبه المنحرف = طول القاعدة المتوسطة × الارتفاع

على الله تكون إفتكرت: ذاكرهم كويس حيشفعوك في الامتحان





## يلا بينا نستنتج قاعدة

إذا كانت م الدائرة الداخلة للمثلث أ ب جـ

∴ م Δ أ ب جـ = م Δ م أ ب + م Δ م ب جـ + م Δ م جـ أ

= ½ أ ب × نق + ½ ب جـ × نق + ½ جـ أ × نق

= ½ نق (أ ب + ب جـ + جـ أ)



**يعني:**

مساحة Δ أ ب جـ = ½ نصف القطر × محيط المثلث أ ب جـ

**من الآخر:**

طول نصف قطر الدائرة الداخلة = (٢ × مساحة المثلث) / محيط المثلث

## تعالى نطبق عشان نتأكد:

من الشكل المقابل أكمل حيث:

دائرة م تمس أضلاع Δ أ ب جـ فإن:

ب و = ...... سم حيث ب هـ = ......

∵ أ ب = ٦ سم ، أ و = ...... ، أ د = ...... سم

∵ جـ هـ = ٦ سم ، جـ د = ...... سم

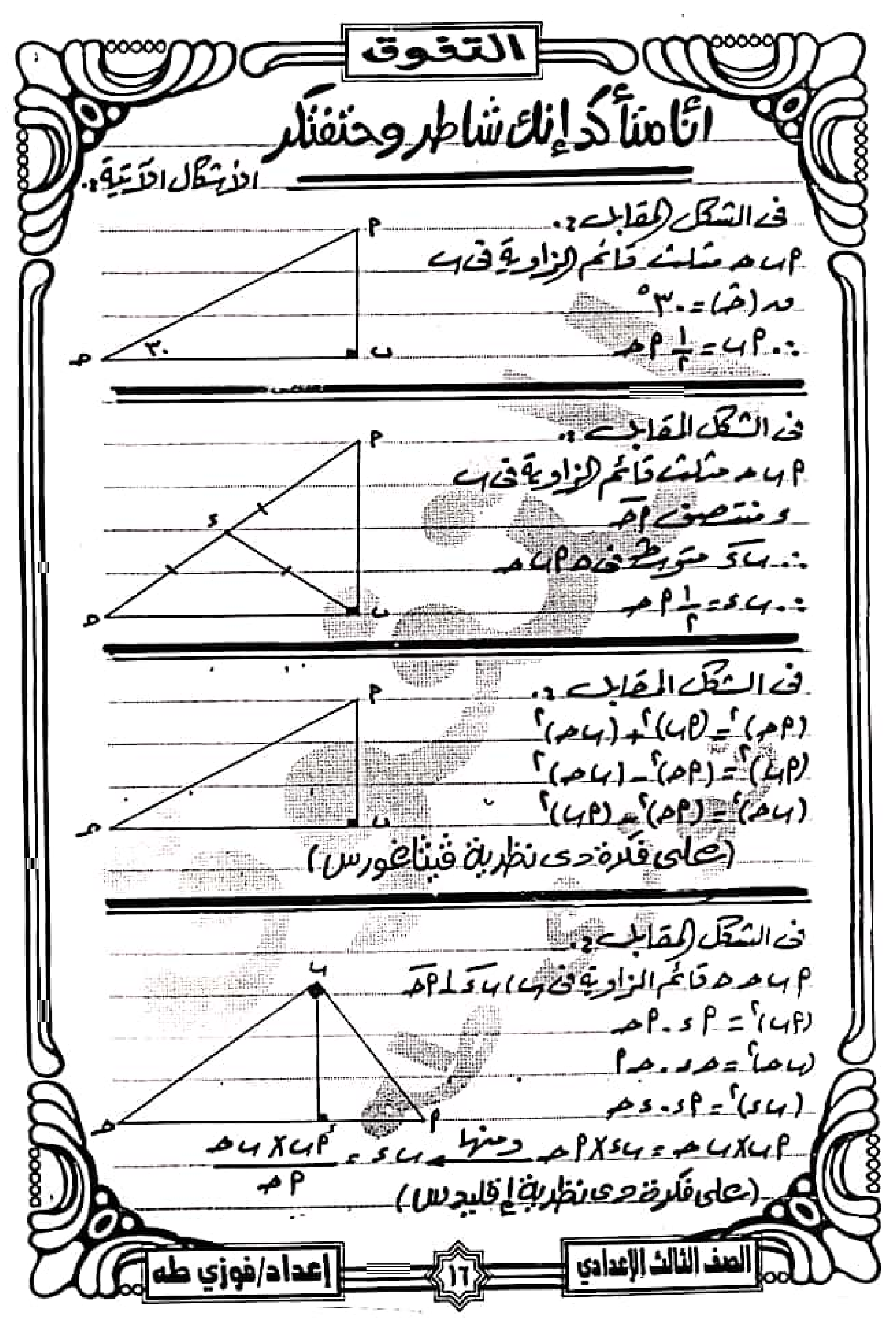
∵ أ ب = ٦ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ جـ = ...... سم

∴ Δ أ ب جـ ......



∴ طول نصف قطر الدائرة الداخلة = (...... × ...... × ...... × ......) / (...... + ...... + ......)

= ...... سم





# أنا متأكد إنك شاطر وحتفتكر

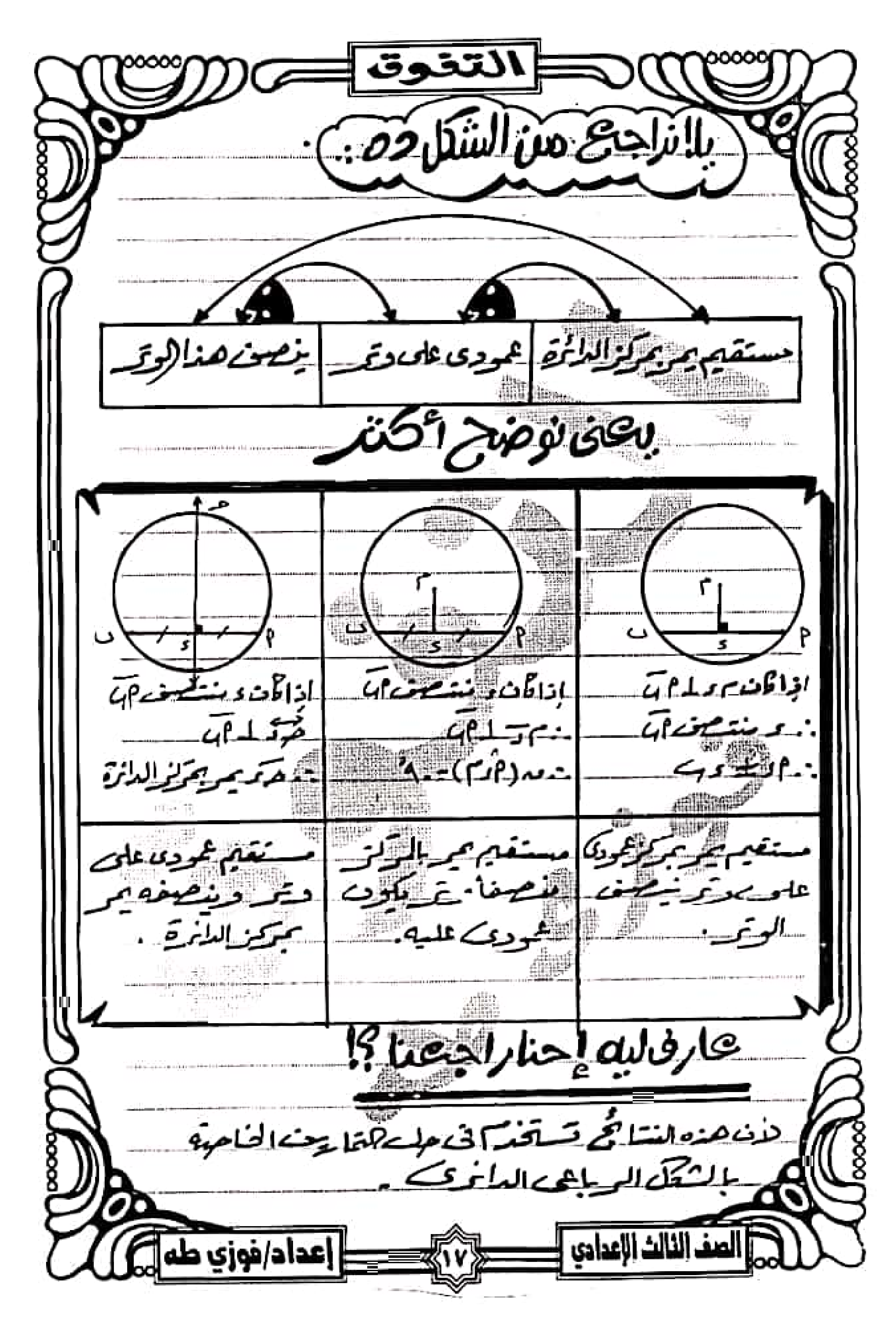
الأشكال الآتية:

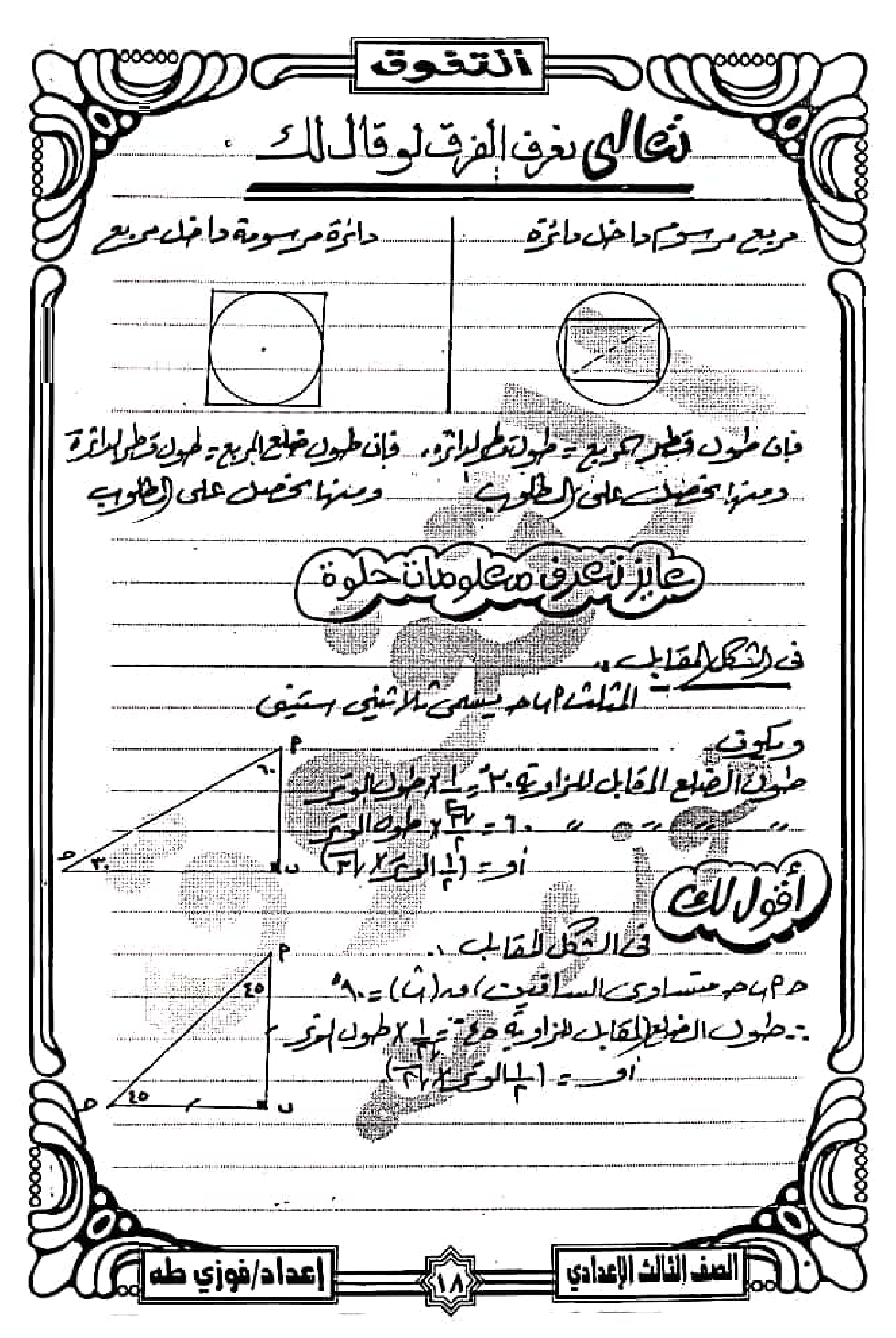
في الشكل المقابل:
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
ق (∠جـ) = ٣٠°
∴ أ ب = $\frac{1}{2}$ أ جـ

في الشكل المقابل:
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب
د منتصف أ جـ
∴ ب د متوسط في △ أ ب جـ
∴ ب د = $\frac{1}{2}$ أ جـ

في الشكل المقابل:
(أ جـ)$^2$ = (أ ب)$^2$ + (ب جـ)$^2$
(أ ب)$^2$ = (أ جـ)$^2$ − (ب جـ)$^2$
(ب جـ)$^2$ = (أ جـ)$^2$ − (أ ب)$^2$
(على فكرة دي نظرية فيثاغورس)

في الشكل المقابل:
أ ب جـ قائم الزاوية في ب، ب د ⊥ أ جـ
(أ ب)$^2$ = أ د . أ جـ
(ب جـ)$^2$ = جـ د . جـ أ
(ب د)$^2$ = أ د . د جـ
أ ب × ب جـ = ب د × أ جـ ومنها ← ب د = $\frac{\text{أ ب} \times \text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$
(على فكرة دي نظرية إقليدس)


التفوق
بالتراجع من الشكل ده :.
مستقيم يمر بمركز الدائرة
عمودي على وتر
ينصف هذا الوتر
يعني نوضح أكتر
م
د
أ
ب
مستقيم يمر بمركز عمودي على وتر ينصف الوتر .
مستقيم يمر بالمركز ومنتصف وتر يكون عمودي عليه .
مستقيم عمودي على وتر وينصفه يمر بمركز الدائرة .
عارف ليه احتاجنا ؟!
لأن هذه النتائج تستخدم في حل تمارين خاصة بالشكل الرباعي الدائري .
الصف الثالث الإعدادي
١٧
إعداد/فوزي طه



# تعالى نعرف الفرق لو قالك

| دائرة مرسومة داخل مربع | مربع مرسوم داخل دائرة |
| --- | --- |
| فإن طول ضلع المربع = طول قطر الدائرة ومنها نحصل على المطلوب | فإن طول قطر المربع = طول قطر الدائرة ومنها نحصل على المطلوب |

## عايز تعرف معلومات حلوة

في الشكل المقابل:

∴ المثلث ا ب ح يسمى مثلث ثلاثيني ستيني

ويكون:

طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = $\frac{1}{2}$ × طول الوتر

" " " ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × طول الوتر

أو = ($\frac{1}{2}$ الوتر × $\sqrt{3}$)

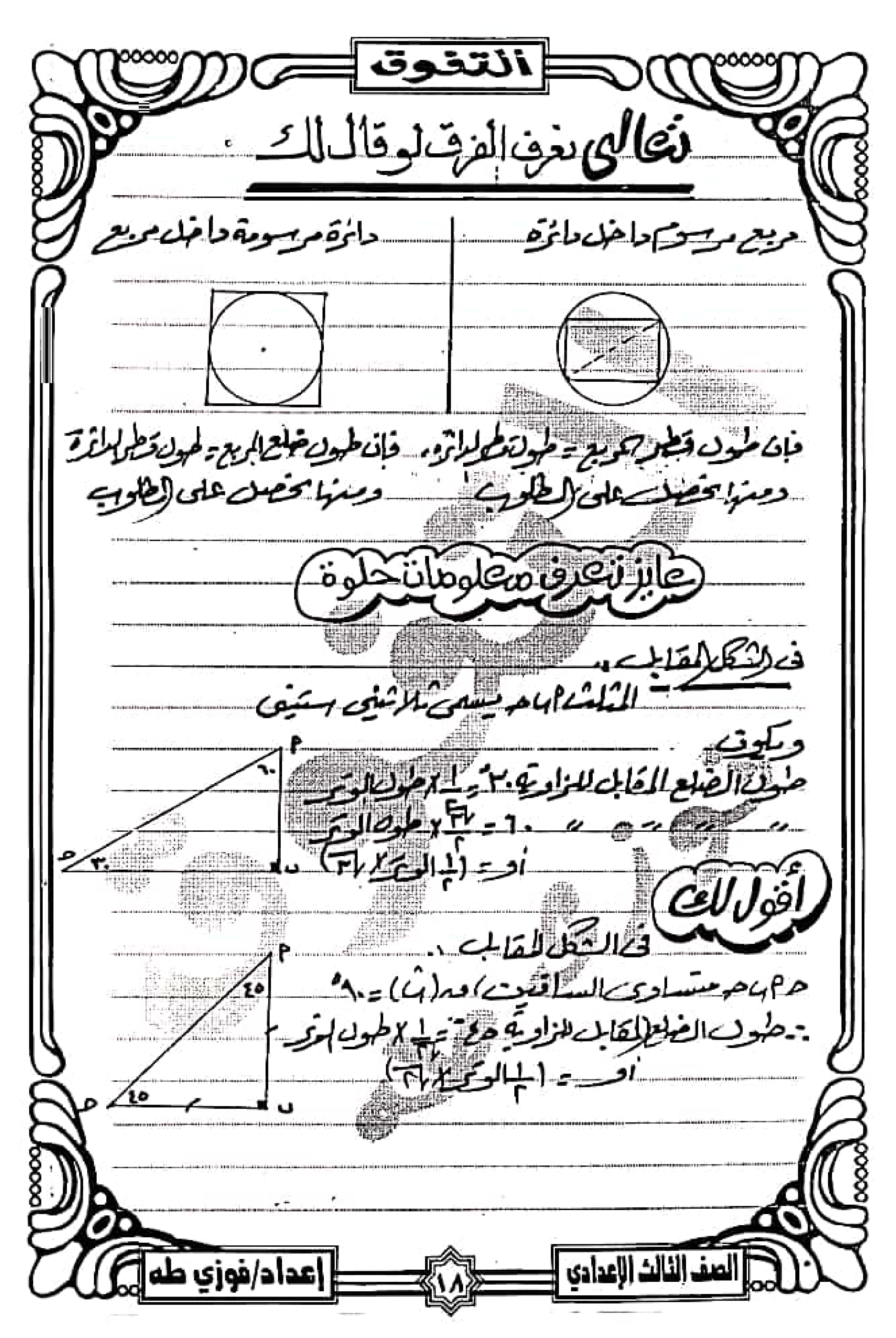
## أقول لك

في الشكل المقابل:

Δ ا ب ح متساوي الساقين، ق(∠ب) = ٩٠°

∴ طول الضلع المقابل للزاوية ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × طول الوتر

أو = ($\frac{1}{2}$ الوتر × $\sqrt{2}$)





# تعالى نعرف الفرق لو قالك

مربع مرسوم داخل دائرة | دائرة مرسومة داخل مربع

فإن طول قطر المربع = طول قطر الدائرة ومنها نحصل على المطلوب

فإن طول ضلع المربع = طول قطر الدائرة ومنها نحصل على المطلوب

## عايز تعرف معلومات حلوة

في الشكل المقابل:

المثلث أ ب جـ يسمى مثلث ثلاثيني ستيني ويكون

طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° = $\frac{1}{2}$ × طول الوتر

" " " " ٦٠ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ × طول الوتر

أو = ($\frac{1}{2}$ الوتر × $\sqrt{3}$)

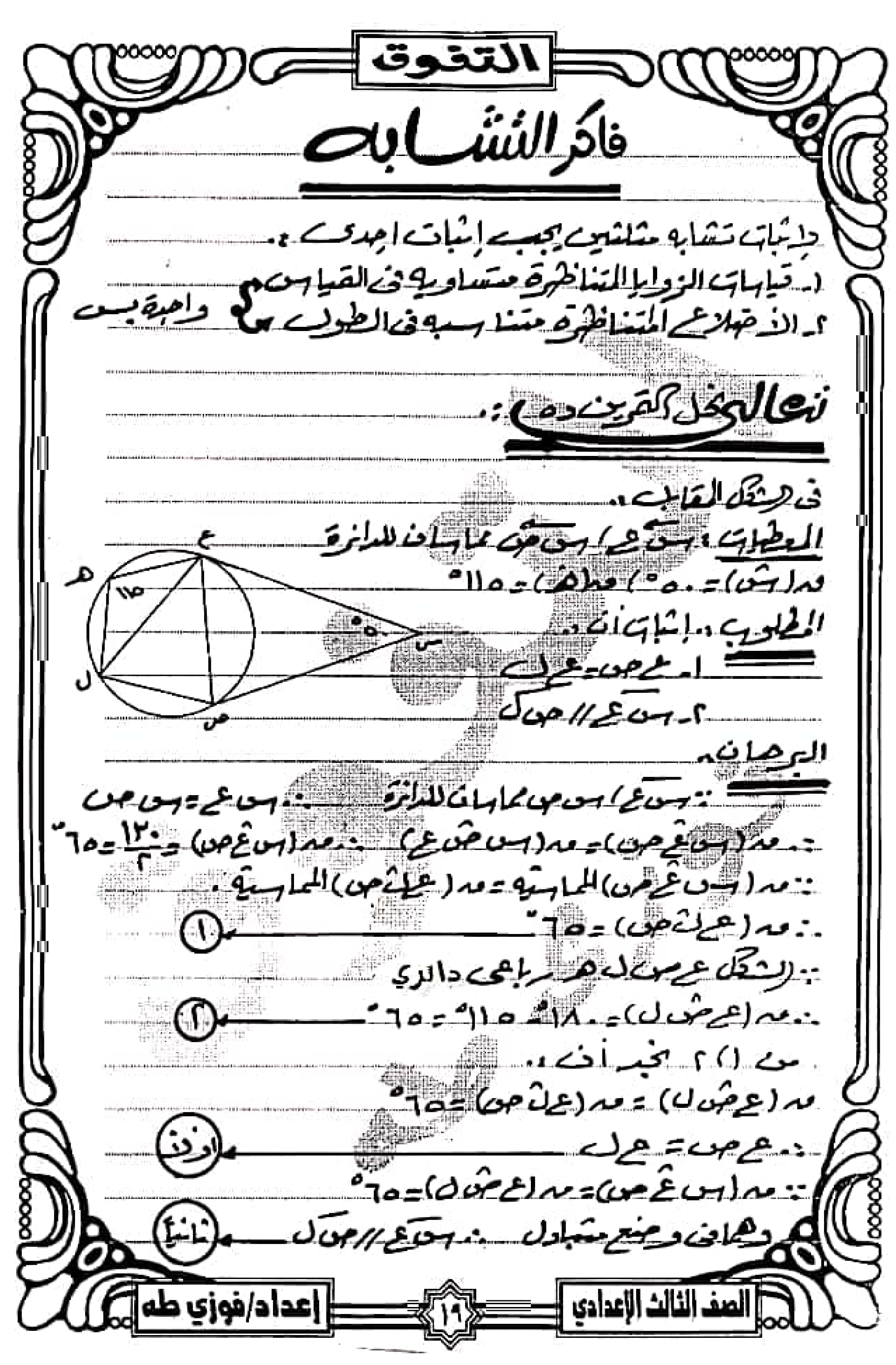
## أقول لك

في الشكل المقابل:

جـ أ ب جـ متساوي الساقين، ق(ب) = ٩٠°

∴ طول الضلع المقابل للزاوية ٤٥ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ × طول الوتر

أو = ($\frac{1}{2}$ الوتر × $\sqrt{2}$)





# فاكر التشابه

لإثبات تشابه مثلثين يجب إثبات احدى :

١- قياسات الزوايا المتناظرة متساوية في القياس
٢- الأضلاع المتناظرة متناسبة في الطول

} واحدة بس

## تعالى نحل التمرين ده :

في الشكل المقابل :

المعطيات : سع ، سص مماسان للدائرة

ق (∠س) = ٥٠° ، ق (∠هـ) = ١١٥°

المطلوب : إثبات أن :

١- ع ص = ع ل

٢- س ع // ص ل



البرهان :

∵ س ع ، س ص مماسات للدائرة ∴ س ع = س ص

∴ ق (∠س ع ص) = ق (∠س ص ع) ∴ ق (∠س ع ص) = $\frac{١٣٠}{٢}$ = ٦٥°

∵ ق (∠س ع ص) المماسية = ق (∠ع ل ص) المحيطية

∴ ق (∠ع ل ص) = ٦٥° ——— (١)

∵ الشكل ع ص ل هـ رباعي دائري

∴ ق (∠ع ص ل) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥° ——— (٢)

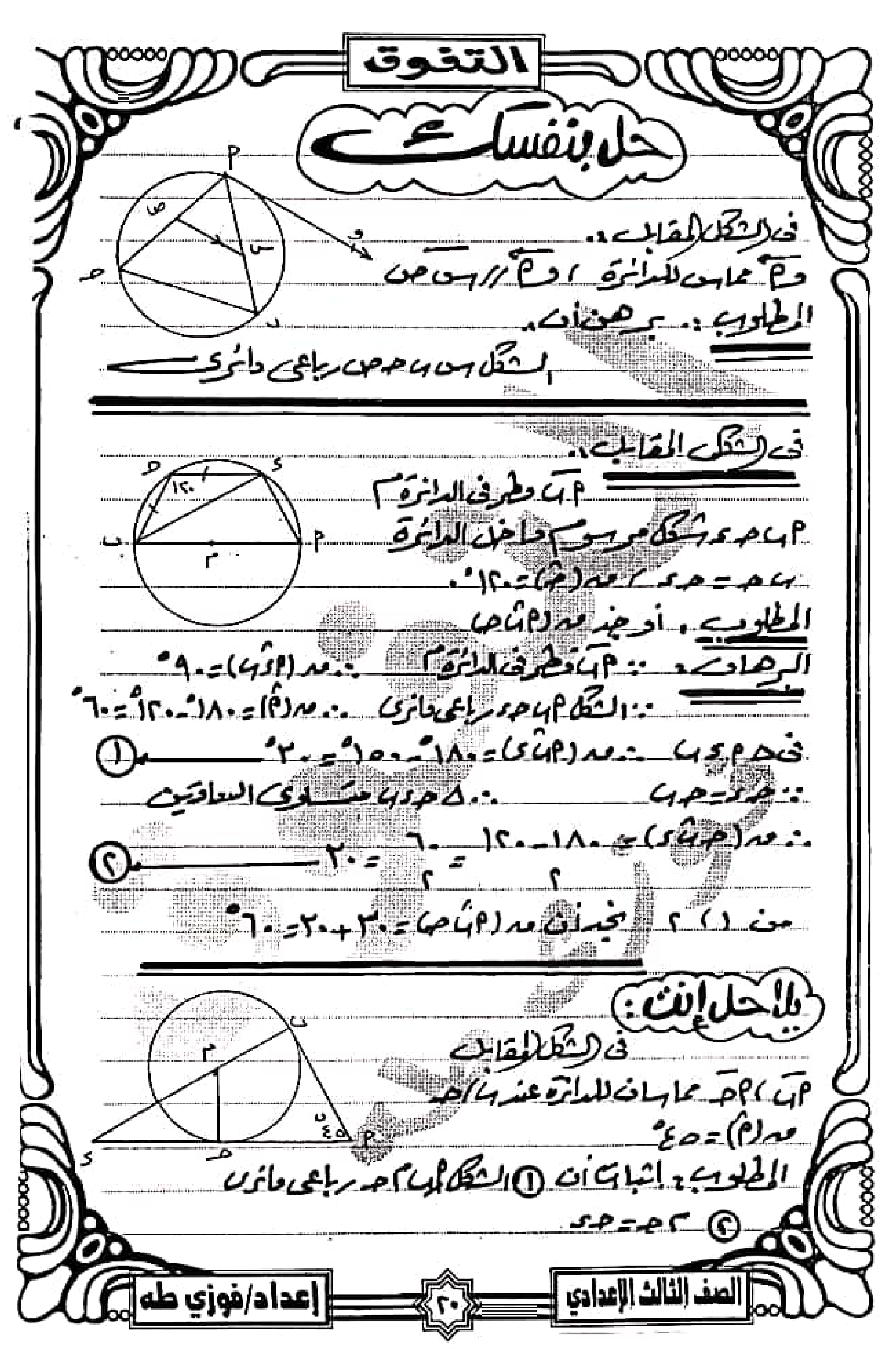
من (١) ، (٢) نجد أن :

ق (∠ع ص ل) = ق (∠ع ل ص) = ٦٥°

∴ ع ص = ع ل ——— (أولاً)

∵ ق (∠س ع ص) = ق (∠ع ص ل) = ٦٥°

وهما في وضع متبادل ∴ س ع // ص ل ——— (ثانياً)





## حل بنفسك

في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{أو}$ مماس للدائرة ، $\overrightarrow{أو}$ // $\overline{س ص}$

**المطلوب:** برهن أن: الشكل س ب جـ ص رباعي دائري

---

في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

أ ب جـ د شكل مرسوم داخل الدائرة

ب جـ = جـ د ، ق(∠جـ) = $120^\circ$

**المطلوب:** أوجد ق(∠أ ب جـ)

**البرهان:** ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ∴ ق(∠أ د ب) = $90^\circ$

∵ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري ∴ ق(∠أ) = $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

في △ أ د ب ∴ ق(∠أ ب د) = $180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$ ← (1)

∵ جـ د = جـ ب ∴ △ جـ د ب متساوي الساقين

∴ ق(∠جـ ب د) = $\frac{180 - 120}{2} = \frac{60}{2} = 30^\circ$ ← (2)

من (1) ، (2) نجد أن ق(∠أ ب جـ) = $30 + 30 = 60^\circ$

---

## يلا حل إنت:

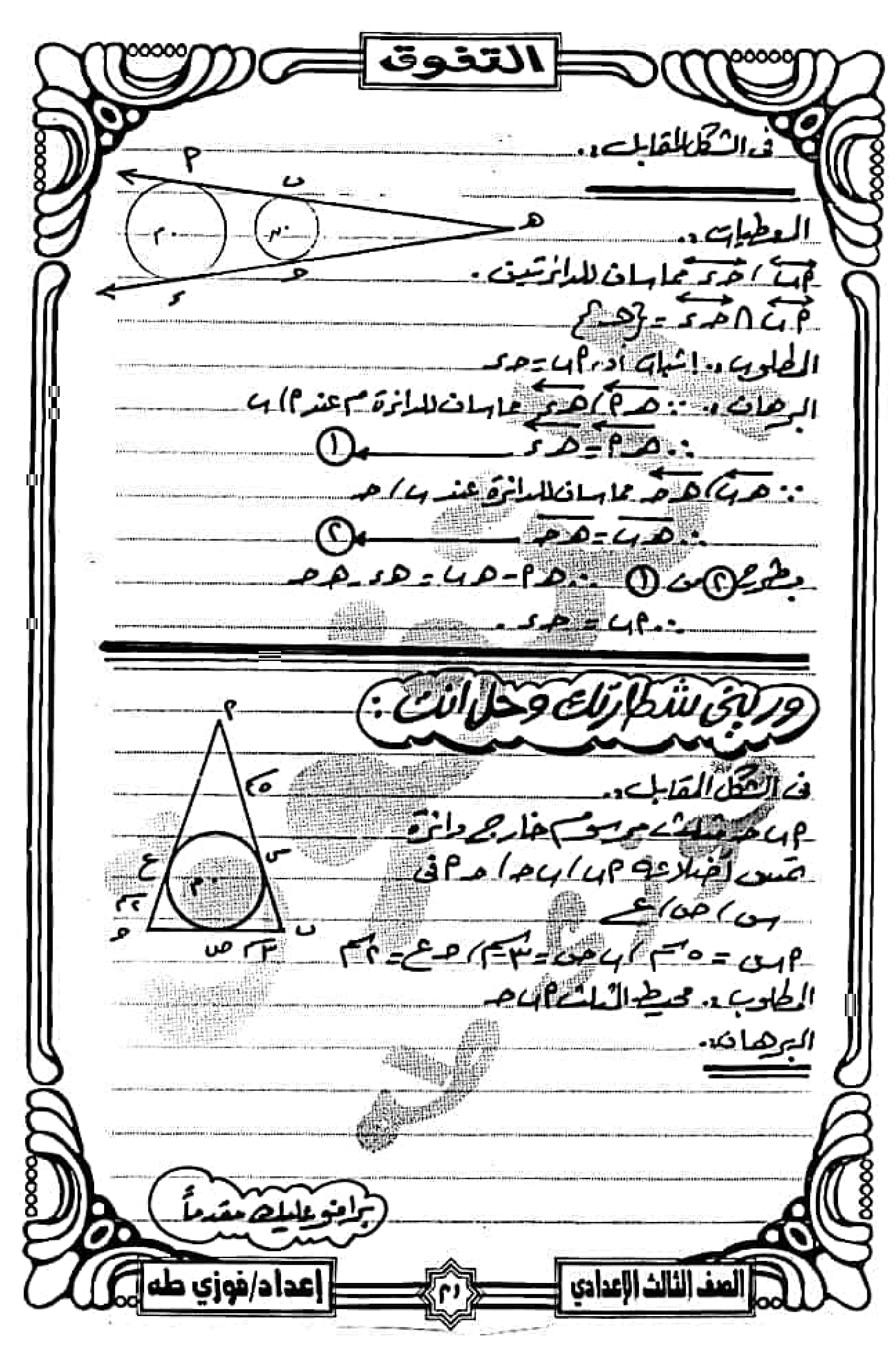
في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

ق(∠أ) = $45^\circ$

**المطلوب:** إثبات أن (1) الشكل أ ب م جـ رباعي دائري

(2) م جـ = جـ د



فى الشكل المقابل :

المعطيات :

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ مماسان للدائرتين .

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{جـ د} = \{هـ\}$

المطلوب : إثبات أن : أب = جـ د

البرهان : ∵ $\overrightarrow{هـ أ}$ ، $\overrightarrow{هـ د}$ مماسان للدائرة م عند أ ، د

∴ هـ أ = هـ د ←── (١)

∵ $\overrightarrow{هـ ب}$ ، $\overrightarrow{هـ جـ}$ مماسان للدائرة ن عند ب ، جـ

∴ هـ ب = هـ جـ ←── (٢)

بطرح (٢) من (١) ∴ هـ أ − هـ ب = هـ د − هـ جـ

∴ أ ب = جـ د .

## وريني شطارتك وحل انت :

فى الشكل المقابل :

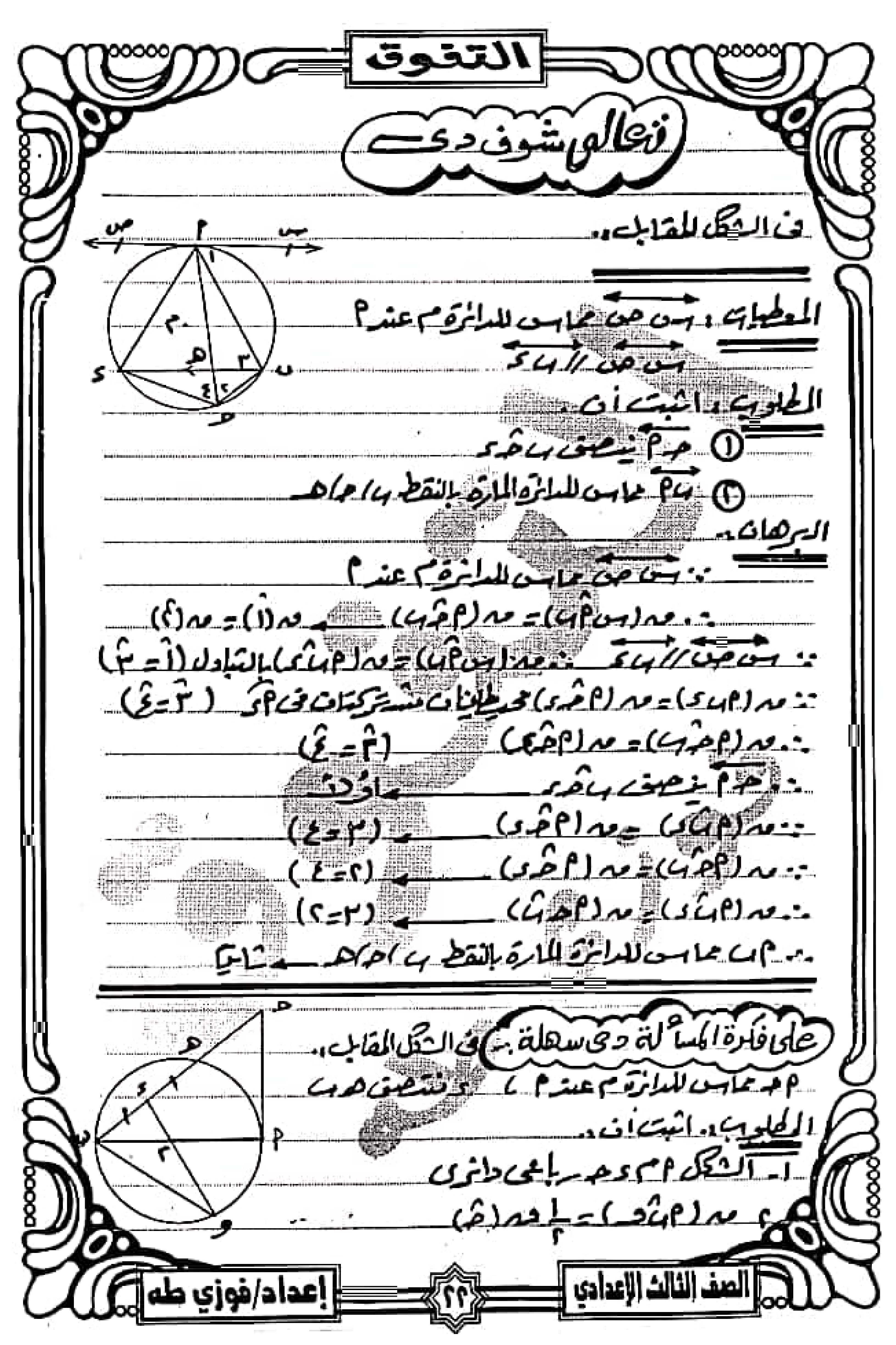
أ ب جـ مثلث مرسوم خارج دائرة تمس أضلاعه أ ب ، ب جـ ، جـ أ فى س ، ص ، ع

أ س = ٥ سم ، ب ص = ٣ سم ، جـ ع = ٢ سم

المطلوب : محيط المثلث أ ب جـ

البرهان :

برافو عليك .. مقدماً



## تعالى شوف دى

في الشكل المقابل:

**المعطيات:** $\overleftrightarrow{سص}$ مماس للدائرة م عند أ

$\overleftrightarrow{سص} \parallel \overleftrightarrow{بء}$

**المطلوب:** اثبت أن:

(1) $\overrightarrow{جـأ}$ ينصف ∠ ب جـ ء

(2) $\overleftrightarrow{بأ}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ب ، جـ ، هـ

**البرهان:**

∵ $\overleftrightarrow{سص}$ مماس للدائرة م عند أ

∴ ق(∠ س أ ب) = ق(∠ أ جـ ب) مماسية ق(1) = ق(2)

∵ $\overleftrightarrow{سص} \parallel \overleftrightarrow{بء}$ ∴ ق(∠ س أ ب) = ق(∠ أ ب ء) بالتبادل (1 = 3)

∵ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ جـ ء) محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{أء}$ (3 = 4)

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ أ جـ ء) (2 = 4)

∴ $\overrightarrow{جـأ}$ ينصف ∠ ب جـ ء أولاً

∵ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ جـ ء) (3 = 4)

∵ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ أ جـ ء) (2 = 4)

∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ جـ ب) (3 = 2)

∴ أ ب مماس للدائرة المارة بالنقط ب ، أ ، هـ ثانياً

---

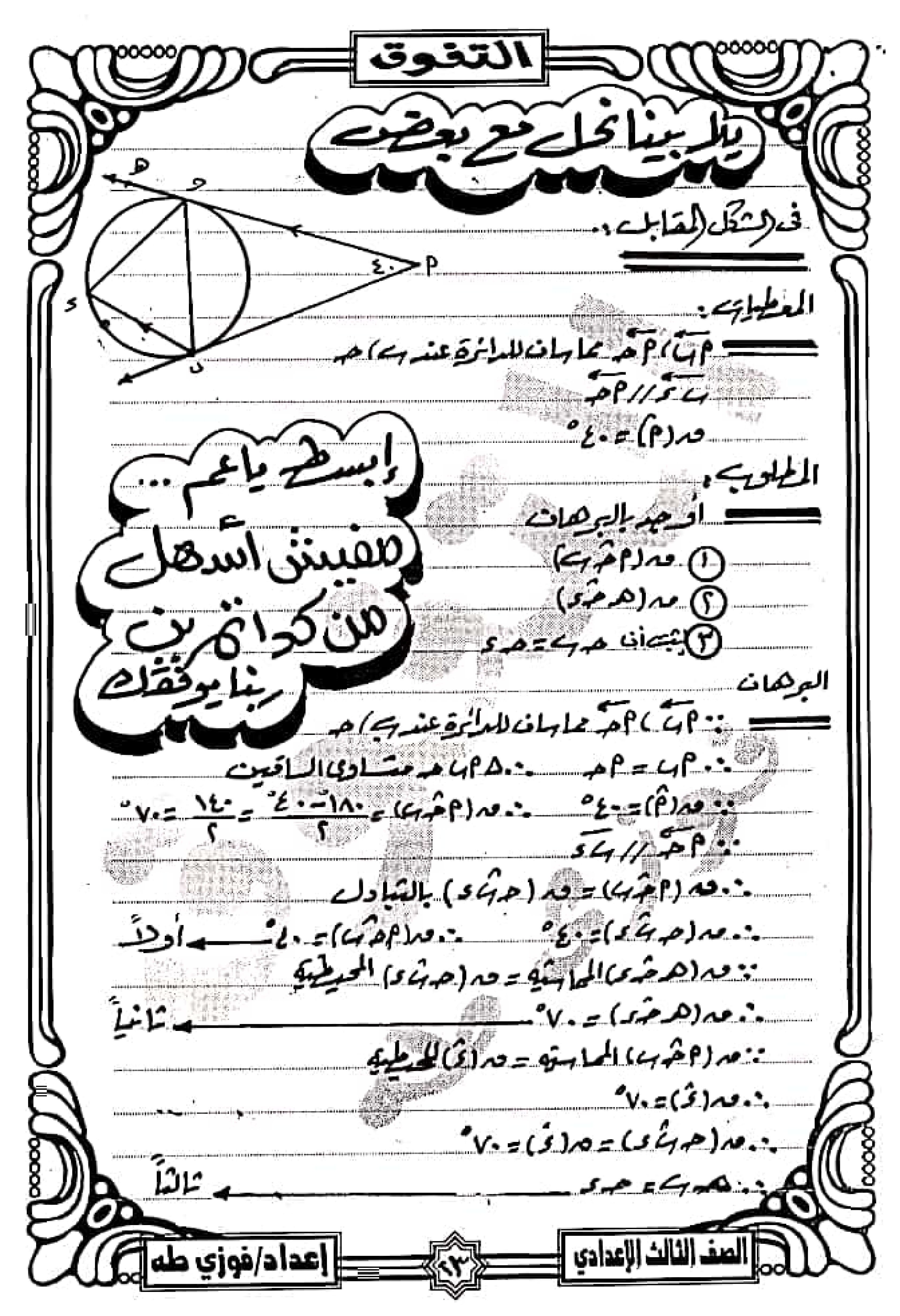
على فكرة المسألة دى سهلة: في الشكل المقابل:

أ هـ مماس للدائرة م عند أ ، ء منتصف جـ ب

**المطلوب:** اثبت أن:

1- الشكل أ م ء هـ رباعي دائري

2- ق(∠ أ م ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ هـ)



# يلا بينا نحل مع بعض

في الشكل المقابل:



**المعطيات:**

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

ب ء // أجـ

ق(∠أ) = ٤٠°

**المطلوب:**

أوجد بالبرهان

(١) ق(∠أجـب)

(٢) ق(∠هـجـء)

(٣) إثبت أن جـب = جـء

**البرهان**

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

∴ أب = أجـ ∴ △أب جـ متساوي الساقين

∵ ق(∠أ) = ٤٠° ∴ ق(∠أجـب) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = $\frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∵ $\overleftrightarrow{أجـ}$ // ب ء

∴ ق(∠أجـب) = ق(∠جـبء) بالتبادل

∴ ق(∠جـبء) = ٤٠° ∴ ق(∠أجـب) = ٤٠° ← أولاً

∵ ق(∠هـجـء) المماسية = ق(∠جـبء) المحيطية

∴ ق(∠هـجـء) = ٧٠° ← ثانياً

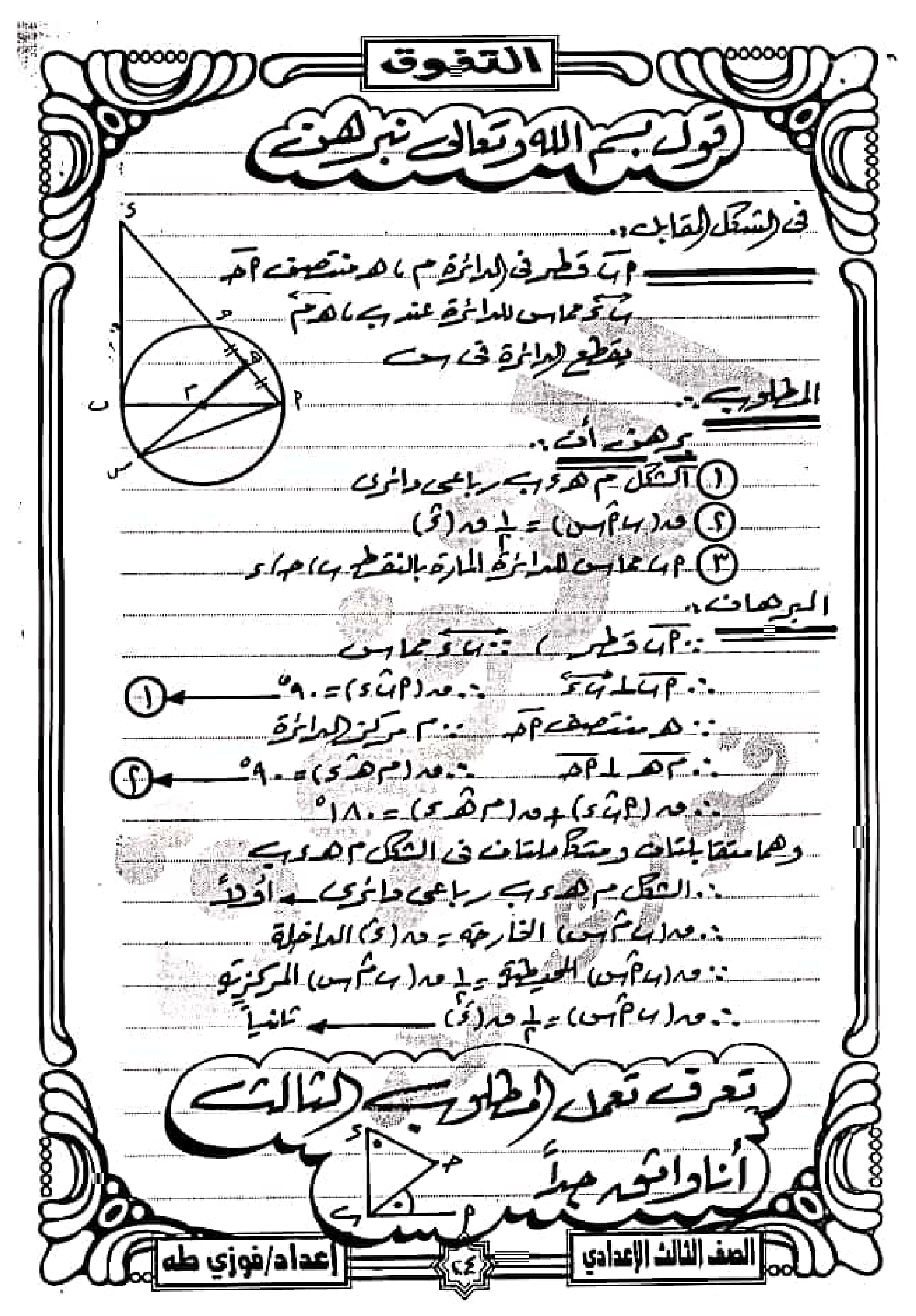
∵ ق(∠أجـب) المماسية = ق(∠ء) المحيطية

∴ ق(∠ء) = ٧٠°

∴ ق(∠جـبء) = ق(∠ء) = ٧٠°

∴ جـب = جـء ← ثالثاً

قول بسم الله وتعالى نبرهن




في الشكل المقابل:

أب قطر في الدائرة م ، هـ منتصف أجـ

ب ء مماس للدائرة عند ب ، هـ م

يقطع الدائرة في س

المطلوب:

برهن أن:

(١) الشكل م هـ ء ب رباعي دائري

(٢) ق(∠ أ م س) = ½ ق(ء)

(٣) م ب مماس للدائرة المارة بالنقط ب ، م ، ء

البرهان:

∵ أب قطر ، ب ء مماس

∴ أب ⊥ ب ء ∴ ق(أ ب ء) = ٩٠° ← (١)

∵ هـ منتصف أجـ ، م مركز الدائرة

∴ م هـ ⊥ أجـ ∴ ق(م هـ ء) = ٩٠° ← (٢)

∴ ق(أ ب ء) + ق(م هـ ء) = ١٨٠°

وهما متقابلتان ومتكاملتان في الشكل م هـ ء ب

∴ الشكل م هـ ء ب رباعي دائري ← أولاً

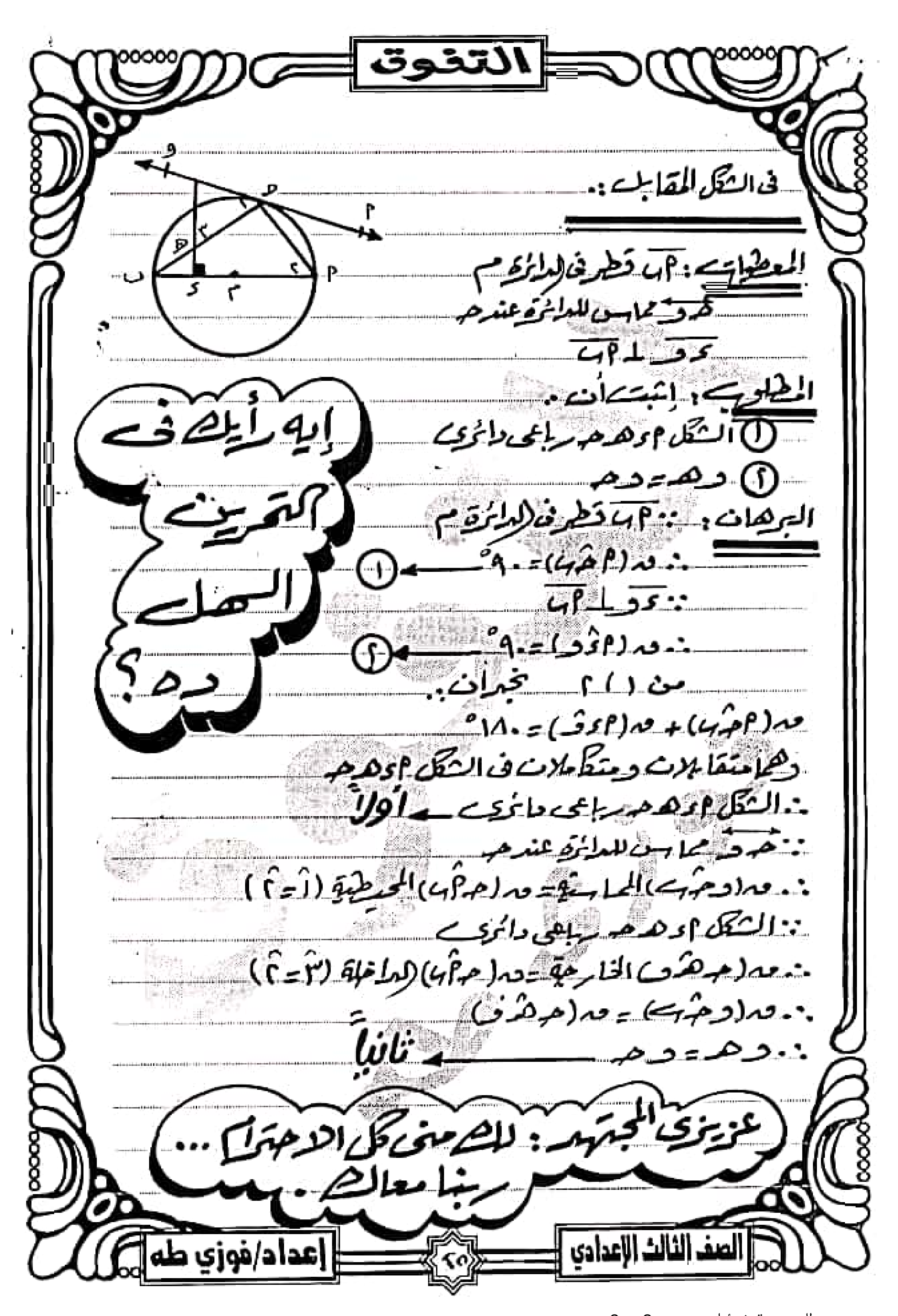
∴ ق(∠ أ م س) الخارجة = ق(ء) الداخلة

∵ ق(∠ أ م س) المحيطية = ½ ق(∠ ب م س) المركزية

∴ ق(∠ أ م س) = ½ ق(ء) ← ثانياً

تعرف تعمل المطلوب الثالث

أنا واثق جداً





في الشكل المقابل :

المعطيات : $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

$\overleftrightarrow{ءو}$ مماس للدائرة عند جـ

$\overline{ءو} \perp \overline{أب}$

المطلوب : إثبات أن :

(١) الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

(٢) ء هـ = ء جـ

البرهان : ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠° ← (١)

∵ $\overline{ءو} \perp \overline{أب}$

∴ ق(∠أ ء و) = ٩٠° ← (٢)

من (١) ، (٢) نجد أن :

ق(∠أ جـ ب) + ق(∠أ ء و) = ١٨٠°

وهما متقابلان ومتكاملان في الشكل أ ء هـ جـ

∴ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري ← أولاً

∵ $\overleftrightarrow{جـ و}$ مماس للدائرة عند جـ

∴ ق(∠و جـ ب) المماسية = ق(∠جـ أ ب) المحيطية (١ = ٢)

∵ الشكل أ ء هـ جـ رباعي دائري

∴ ق(∠جـ هـ و) الخارجية = ق(∠جـ أ ب) الداخلة (٣ = ٢)

∴ ق(∠و جـ هـ) = ق(∠جـ هـ و)

∴ ء هـ = ء جـ ← ثانياً

عزيزي المجتهد : لك مني كل الاحترام ... ربنا معاك .

# " الهندسة "

## * أسئلة الإكمال والإختيار من متعدد:

١- الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ..........

٢- عدد محاور التماثل لأى دائرة هو ..........

← " " لأى قطاع من الدائرة هو ..........

٣- إذا كان المستقيم مماساً للدائرة التى طول قطرها ٨ سم فإنه يبعد عن مركزها بمقدار .......... سم.

٤- سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {م} ، وطول نصف قطر احداهما ٣ سم ، م ن = ٨ سم فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى = .......... سم

٥- عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج ..........

← " " " " " " من الداخل ..........

٦- قياس القوس الذى يمثل نصف قياس الدائرة يساوى ..........

← " " " ثلث قياس الدائرة يساوى ..........

٧- الزاوية المماسية محصورة بين ..........

٨- ا ب حـ د شكل رباعى دائرى: ق(∠ا) = ٦٠° فإن: ق(∠حـ) = ..........°

٩- دائرتان م ، ن متماستان من الداخل طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٩ سم فإن: م ن = .......... سم.

١٠- قياس الزاوية المحيطية التى تقابل قوساً أصغر فى الدائرة ..........

← " " " " " قوساً أكبر فى الدائرة ..........

١١- النسبة بين الزاوية المحيطية والزاوية المركزية المشتركة فى نفس القوس ..........

١٢- يمكن رسم دائرة تمر برؤوس .........، .........، .........

← لا يمكن رسم دائرة تمر برؤوس .........، .........، .........

١٣- مركز الدائرة الداخلة للمثلث هى نقطة تقاطع ..........

١٤- مركز الدائرة الخارجة للمثلث هى نقطة تقاطع ..........

١٥- قياس زاوية رأس الشكل السداسى المنتظم = ..........°

١٦- في الشكل الرباعى الدائرى: كل زاويتين متقابلتين ..........

١٧- إذا كانت الدائرتان م ، ن متماستان من الداخل وطول نصف قطر إحداهما ٣سم ، م ن = ٨سم فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى يساوى ...... سم.

١٨- ما هى خواص الشكل الرباعى الدائرى ..............

١٩- إذا كانت مساحة الدائرة ٩π سم² فإن طول نصف قطرها يساوى ...... سم

٢٠- عدد محاور تماثل المربع ..... ، المستطيل ..... ، المعين ..... ، متوازى الأضلاع ..... ، شبه المنحرف ..... ، شبه المنحرف متساوى الساقين ..... ، Δ متساوى الأضلاع ..... ، Δ متساوى الساقين ، Δ مختلف الأضلاع ..... .

٢١- $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{أد}$ ، $\overleftrightarrow{بء}$ مماسان للدائرة فإن : $\overleftrightarrow{أد}$ ...... $\overleftrightarrow{بء}$ ( يقطع - يوازى - عمودى على - ينطبق على )

٢٢- المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى دائرة يكونان .......

٢٣- أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى ، ق(∠ب) = ½ ق(∠ء) فإن ق(∠ب) = ......°

٢٤- دائرة نصف قطرها (٢س + ٦) سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢) حيث س > ٠ فإن : المستقيم ل يكون .......

٢٥- إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ الدائرة م = {أ ، ب} فإن $\overleftrightarrow{أب}$ ∩ سطح الدائرة م = .......

٢٦- طول القوس الذى يمثل ربع الدائرة يساوى .......

٢٧- دائرة طول نصف قطرها ٣سم فإن محيطها = ....... سم (بدلالة π)

٢٨- مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى الداخلة = .......°

٢٩- دائرة طول قطرها (٢س + ٥) ، المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢) سم فإن المستقيم ل يكون .......

٣٠- م ، ن دائرتان متقاطعتان وطولا نصفى قطريهما ٣سم ، ٤سم فإن : م ن ∋ .......

٣١- مثلث أ ب جـ له محور تماثل واحد وأطوال أضلاعه ١٠ ، ٥ ، س سم فإن س = ...... سم ( ٥ - ٨ - ١٠ - ١٢ )

٣٢- النسبة بين قياسات زوايا مثلث هى ٢ : ٣ : ٤ فإن أكبر زاوية فى المثلث .......

٣٣- أطول الأوتار فى الدائرة يسمى .......

٣٤- الوتر المار بمركز الدائرة يسمى ..........

٣٥- صورة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ سم وعرضها ٤٠ سم أحيطت بإطار خشبي عرضه ٥ سم فتكون مساحة الشكل كله = ..........

٣٦- عدد المماسات التي يمكن رسمها من نقطة تقع على دائرة = ..........

٣٧- إذا كان م١ ، م٢ مستقيمان متعامدان فإن: م١ × م٢ = ..........

٣٨- محيط المعين = ..........

٣٩- مساحة المعين الذي طولا قطريه ٨ سم ، ١٠ سم = .......... سم٢

٤٠- طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠° في المثلث القائم الزاوية يساوي ..........

٤١- المماس للدائرة التي طول قطرها ٨ سم يكون على بعد .......... سم من مركزها.

٤٢- القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة دائماً يكونان ..........

٤٣- يكون الشكل رباعي دائري إذا كان ..........

٤٤- مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ..........°

٤٥- مجموع طولي أي ضلعين في مثلث .......... طول الضلع الثالث.

٤٦- عدد الدوائر التي تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة = ..........

٤٧- صورة النقطة (٢ ، ٣) بالدوران د (و ، ١٨٠°) هي النقطة ..........

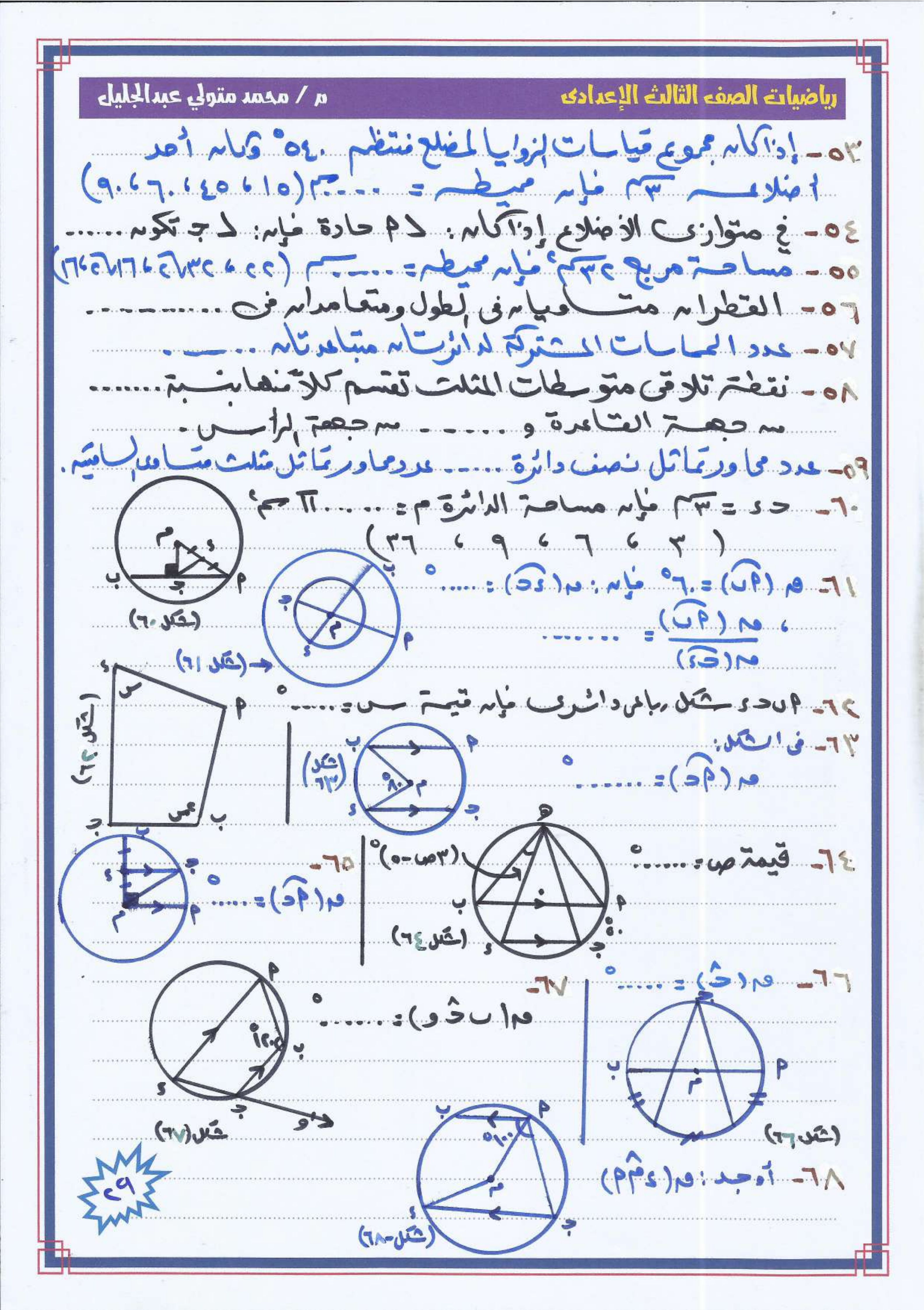
٤٨- مستطيل طوله ٦ سم ومحيطه ٢٦ سم فإن مساحته = .......... سم٢

٤٩- إذا كان مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم هو نقطة فإن:
القطعة المستقيمة .......... المستقيم ( // ، ⊥ ، ∋ ، ⊂ )

٥٠- دائرة محيطها ٦π سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣ سم فإن المستقيم ل يكون ..........

٥١- الزاوية المحيطية التي تقابل ربع دائرة = ..........°
← الزاوية المحيطية المرسومة في ربع دائرة = ..........°
← " " " " في ثلث دائرة = ..........°

٥٢- دائرتان م ، ن متماستان من الداخل ، نصفا قطري الدائرتين ٣ سم ، نق سم ، نق > ٥ ، م ن = ٣ سم فإن نق = .......... سم
(٦ ، ٨ ، ٧ ، ٩)


٥٣- إذا كان مجموع قياسات الزوايا لمضلع منتظم ٥٤٠° وكان أحد أضلاعه ٣سم فإن محيطه = ......سم (١٥ ، ٤٥ ، ٦٠ ، ٩٠)
٥٤- في متوازي الأضلاع إذا كان: ق(∠أ) حادة فإن: ق(∠جـ) تكون ......
٥٥- مساحة مربع ٣٢سم² فإن محيطه = ......سم (٢٢ ، ٣٢ ، ٢√١٦ ، ٢√١٦)
٥٦- القطران متساويان في الطول ومتعامدان في ......
٥٧- عدد المماسات المشتركة لدائرتان متباعدتان ......
٥٨- نقطة تلاقي متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ...... من جهة القاعدة و ...... من جهة الرأس.
٥٩- عدد محاور تماثل نصف دائرة ...... عدد محاور تماثل مثلث متساوي الساقين.
٦٠- جـ د = ٣سم فإن مساحة الدائرة م = ......π سم² (٣ ، ٦ ، ٩ ، ٣٦)
(شكل ٦٠)
٦١- ق(أب⌒) = ٦٠° فإن: ق(جـ د⌒) = ......°
، ق(أب⌒) / ق(جـ د⌒) = ......
(شكل ٦١)
٦٢- أب جـ د شكل رباعي دائري فإن قيمة س = ......°
(شكل ٦٢)
٦٣- في الشكل: ق(أ د⌒) = ......°
(شكل ٦٣)
٦٤- قيمة ص = ......°
(٣ص - ٥)°
(شكل ٦٤)
٦٥- ق(أ د⌒) = ......°
٦٦- ق(∠ ) = ......°
(شكل ٦٦)
٦٧- ق(∠ب جـ و) = ......°
١٢٠°
(شكل ٦٧)
٦٨- أوجد: ق(∠د م أ)
١٠٠°
(شكل ٦٨)
٤٩

## إجابات أسئلة الإكمال والاختيار من متعدد :

١- قائمة (٩٠°) . ٢- عدد لا نهائي ـ ١ ٣- ٤

٤- ٥ ٥- ٣ ← ١ ٦- ١٨٠° ← ١٢٠

٧- وتر ومماس ٨- ١٢٠° ٩- ٤

١٠- حادة - منفرجة ١١- ١ : ٢ ١٢- المستطيل ، المربع ، شبه المنحرف المتساوي الساقين ← متوازي الأضلاع ، المعين ، شبه المنحرف غير متساوي الساقين

١٣- منصفات زواياه الداخلة .

١٤- مجاور تماثل أضلاعهم ١٥- ١٢٠° ١٦- متكاملتان (مجموع قياسهما ١٨٠°)

١٧- ١١ ١٨- كل زاويتان متقابلتان متكاملتان ، قياس الزاوية الخارجة عند أي رأس من رؤوس الشكل يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها . ١٩- ٣

٢٠- ٤ ، ٢ ، ٢ ، صفر ، صفر ، ١ ، ٣ ، ١ ، صفر .

٢١- يوازي . ٢٢- متوازيان . ٢٣- ٦٠°

٢٤- قاطعا الدائرة في نقطتين ٢٥- $\overline{أب}$ ٢٦- $\frac{\pi \text{نق}}{٢}$

٢٧- ١٠π ٢٨- ٣٦٠° ٢٩- قاطعا الدائرة في نقطتين .

٣٠- ]٣ ، ٧[ ٣١- ١٠ ٣٢- ٨٠° ٣٣- قطراً

٣٤- قطراً ٣٥- ٥٠٠π سم² ٣٦- ١ ٣٧- -١

٣٨- طول الضلع × ٤ ٣٩- ٤٠ ٤٠- ½ طول الوتر ٤١- ٤

٤٢- متساويتان في الطول (متطابقتان) ٤٣- زاويتان متقابلتان متكاملتان

٤٤- ٣٦٠° ٤٥- > ٤٦- ١ ٤٧- (-٢ ، -٣) ٤٨- ١٢

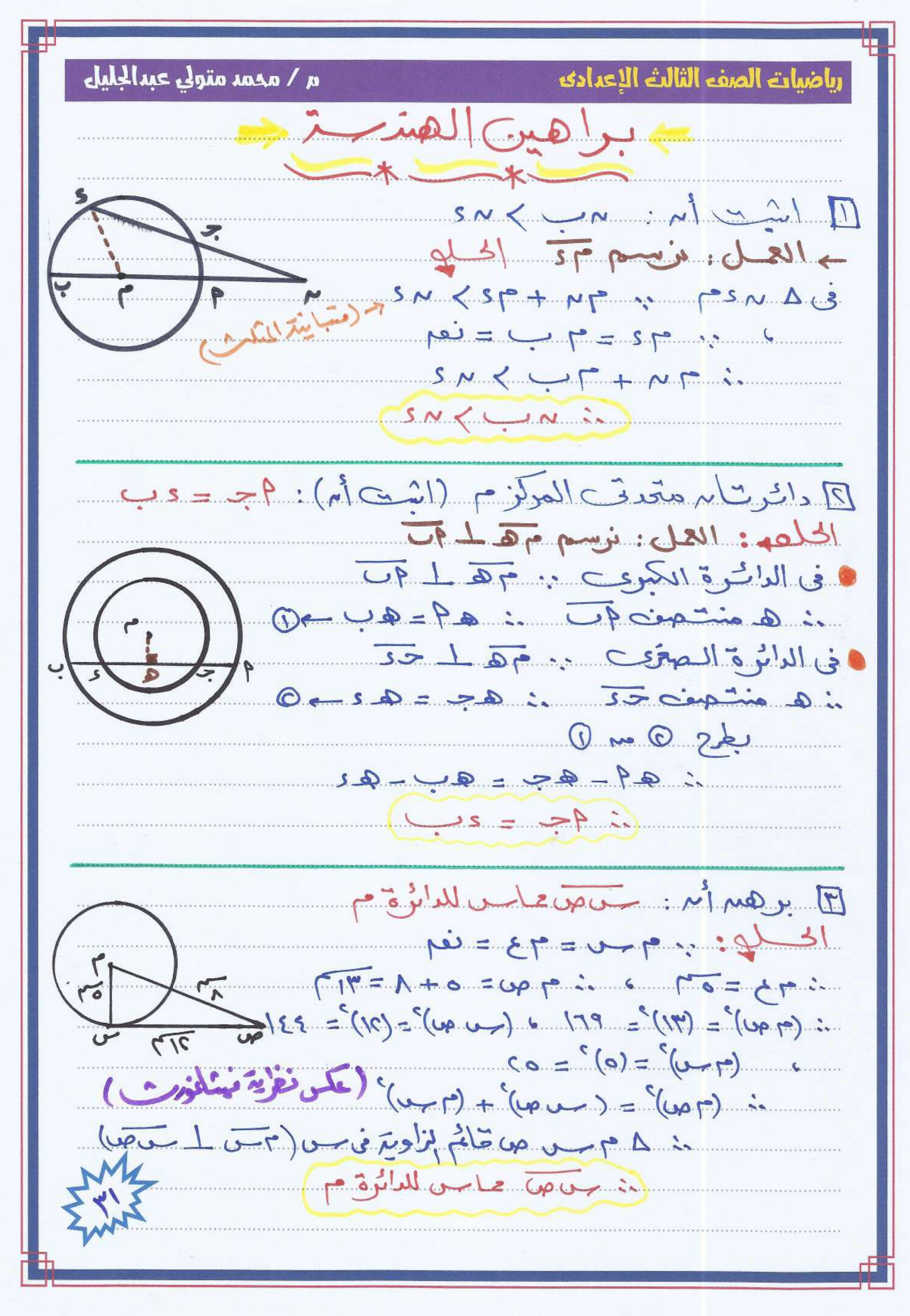
٤٩- ⊥ ٥٠- مماس للدائرة ٥١- ٤٥° ← ١٣٥° ← ١٢٠°

٥٢- ٨ ٥٣- ١٥ ٥٤- منفرجة ٥٥- ١٦π ٥٦- المربع

٥٧- ٤ ٥٨- ١ : ٢ ، ٢ : ١ ٥٩- = ٦٠- ٣٦

٦١- ٦٠° ، ١ ٦٢- ٦٠° ٦٣- ٨٠° ٦٤- ١٠°

٦٥- ٣٠° ٦٦- ٣٠° ٦٧- ٦٠° ٦٨- ١٦٠°





# براهين الهندسة

**1** اثبت أن: ن ب > ن د

العمل: نرسم $\overline{م د}$ — الحل

في Δ ن د م ∵ م ن + م د > ن د ← (متباينة المثلث)

، ∵ م د = م ب = نق

∴ م ن + م ب > ن د

∴ ن ب > ن د

---

**2** دائرتان متحدتا المركز م (اثبت أن): أ جـ = د ب

الحل: العمل: نرسم $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

- في الدائرة الكبرى ∵ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ هـ أ = هـ ب ← (1)

- في الدائرة الصغرى ∵ $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{جـ د}$

∴ هـ منتصف $\overline{جـ د}$ ∴ هـ جـ = هـ د ← (2)

بطرح (2) من (1)

∴ هـ أ − هـ جـ = هـ ب − هـ د

∴ أ جـ = د ب

---

**3** برهن أن: $\overline{س ص}$ مماس للدائرة م

الحل: ∵ م س = م ع = نق

∴ م ع = 5 سم ، ∴ م ص = 5 + 8 = 13 سم

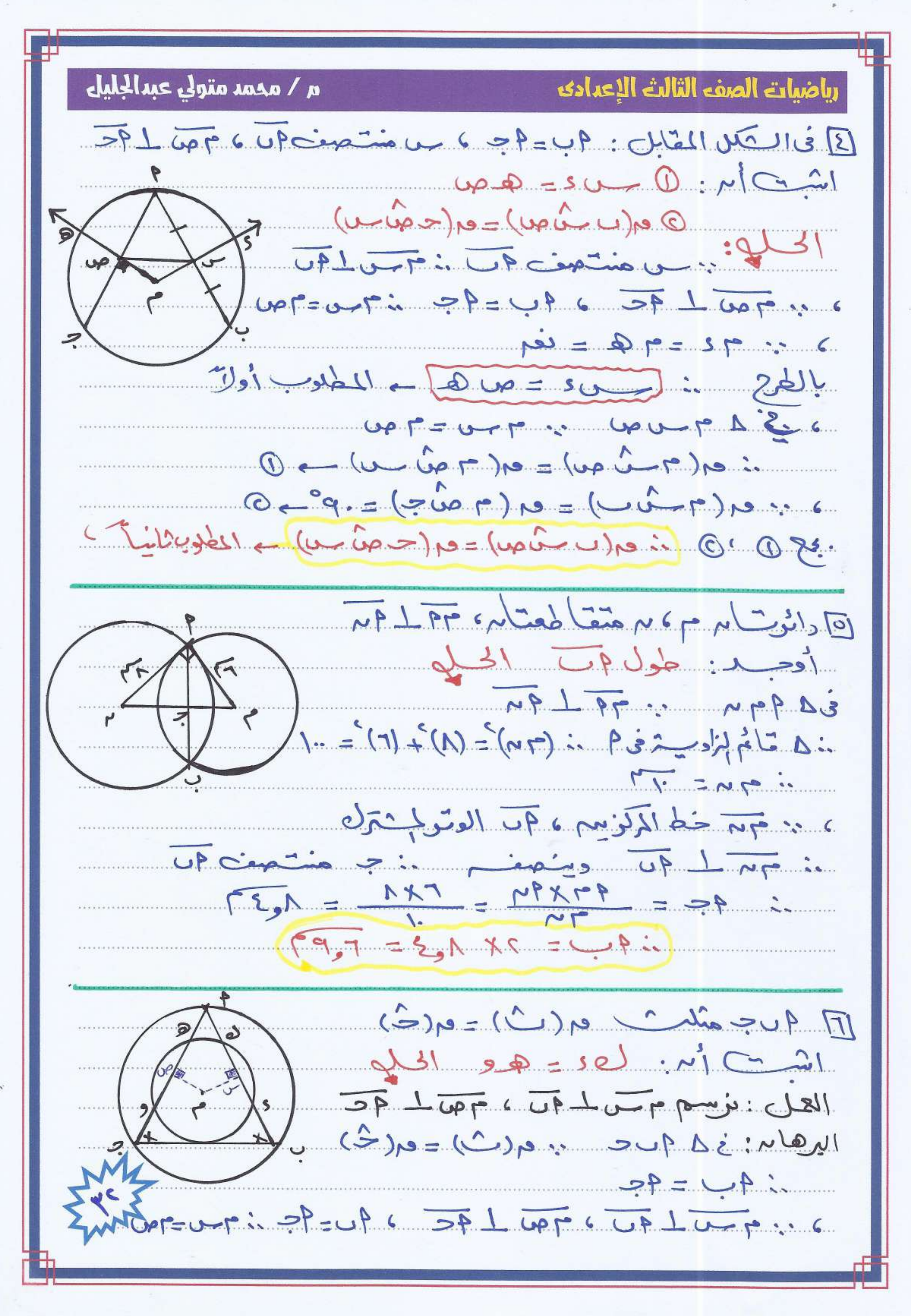
∴ (م ص)² = (13)² = 169 ، (س ص)² = (12)² = 144

، (م س)² = (5)² = 25

∴ (م ص)² = (س ص)² + (م س)² (عكس نظرية فيثاغورث)

∴ Δ م س ص قائم الزاوية في س ($\overline{م س}$ ⊥ $\overline{س ص}$)

∴ $\overline{س ص}$ مماس للدائرة م





[٤] في الشكل المقابل: أب = أجـ ، س منتصف أب ، م ص ⊥ أجـ

اثبت أن: ① س د = هـ ص

② ق(∠ب س ص) = ق(∠جـ ص س)

الحل: ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

، ∵ م ص ⊥ أجـ ، أب = أجـ ∴ م س = م ص

، ∵ م د = م هـ = نق

بالطرح ∴ س د = ص هـ ← المطلوب أولاً

، في △ م س ص ∵ م س = م ص

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م ص س) ← ①

، ∵ ق(∠م س ب) = ق(∠م ص جـ) = ٩٠° ← ②

بجمع ① ، ② ∴ ق(∠ب س ص) = ق(∠جـ ص س) ← المطلوب ثانياً

---

[٥] دائرتان م ، ن متقاطعتان ، م أ ⊥ أ ن

أوجد: طول أب الحل

في △ أ م ن ∵ م أ ⊥ أ ن

∴ △ قائم الزاوية في أ ∴ (م ن)² = (٨)² + (٦)² = ١٠٠

∴ م ن = ١٠ سم

، ∵ م ن خط المركزين ، أب الوتر المشترك

∴ م ن ⊥ أب وينصفه ∴ جـ منتصف أب

∴ أجـ = (أم × أن) / (م ن) = (٦ × ٨) / ١٠ = ٤٫٨ سم

∴ أب = ٢ × ٤٫٨ = ٩٫٦ سم

---

[٦] أب جـ مثلث ق(∠ب) = ق(∠جـ)

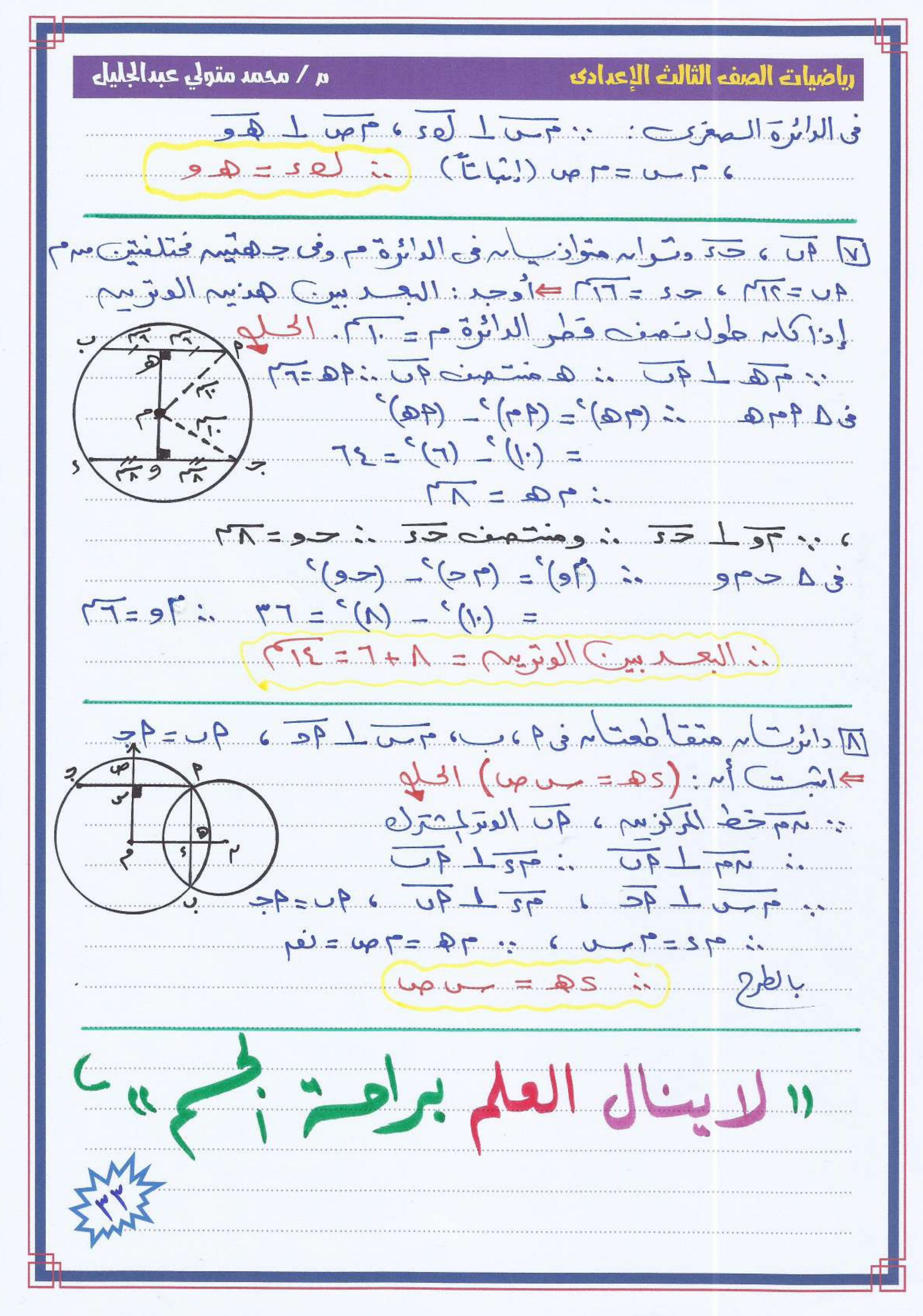
اثبت أن: ل د = هـ و الحل

العمل: نرسم م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أجـ

البرهان: في △ أب جـ ∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ)

∴ أب = أجـ

، ∵ م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أجـ ، أب = أجـ ∴ م س = م ص





فى الدائرة الصغرى : ∵ م س ⊥ ل ك ، م ص ⊥ هـ و

، م س = م ص (إثباتاً) ∴ ل ك = هـ و

---

[٧] أ ب ، جـ د وتران متوازيان فى الدائرة م وفى جهتين مختلفتين من م

أ ب = ١٢ سم ، جـ د = ١٦ سم ⇐ أوجد : البعد بين هذين الوترين

إذا كان طول نصف قطر الدائرة م = ١٠ سم .

الحل

∵ م هـ ⊥ أ ب ∴ هـ منتصف أ ب ∴ أ هـ = ٦ سم

فى Δ أ م هـ ∴ (م هـ)$^2$ = (أ م)$^2$ − (أ هـ)$^2$

= (١٠)$^2$ − (٦)$^2$ = ٦٤

∴ م هـ = ٨ سم

، ∵ م و ⊥ جـ د ∴ و منتصف جـ د ∴ جـ و = ٨ سم

فى Δ جـ م و ∴ (م و)$^2$ = (م جـ)$^2$ − (جـ و)$^2$

= (١٠)$^2$ − (٨)$^2$ = ٣٦ ∴ م و = ٦ سم

∴ البعد بين الوترين = ٨ + ٦ = ١٤ سم

---

[٨] دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، م س ⊥ أ جـ ، أ ب = أ جـ

⇐ اثبت أن : (د هـ = س ص)

الحل

∵ م ن خط المركزين ، أ ب الوتر المشترك

∴ م ن ⊥ أ ب ∴ م د ⊥ أ ب

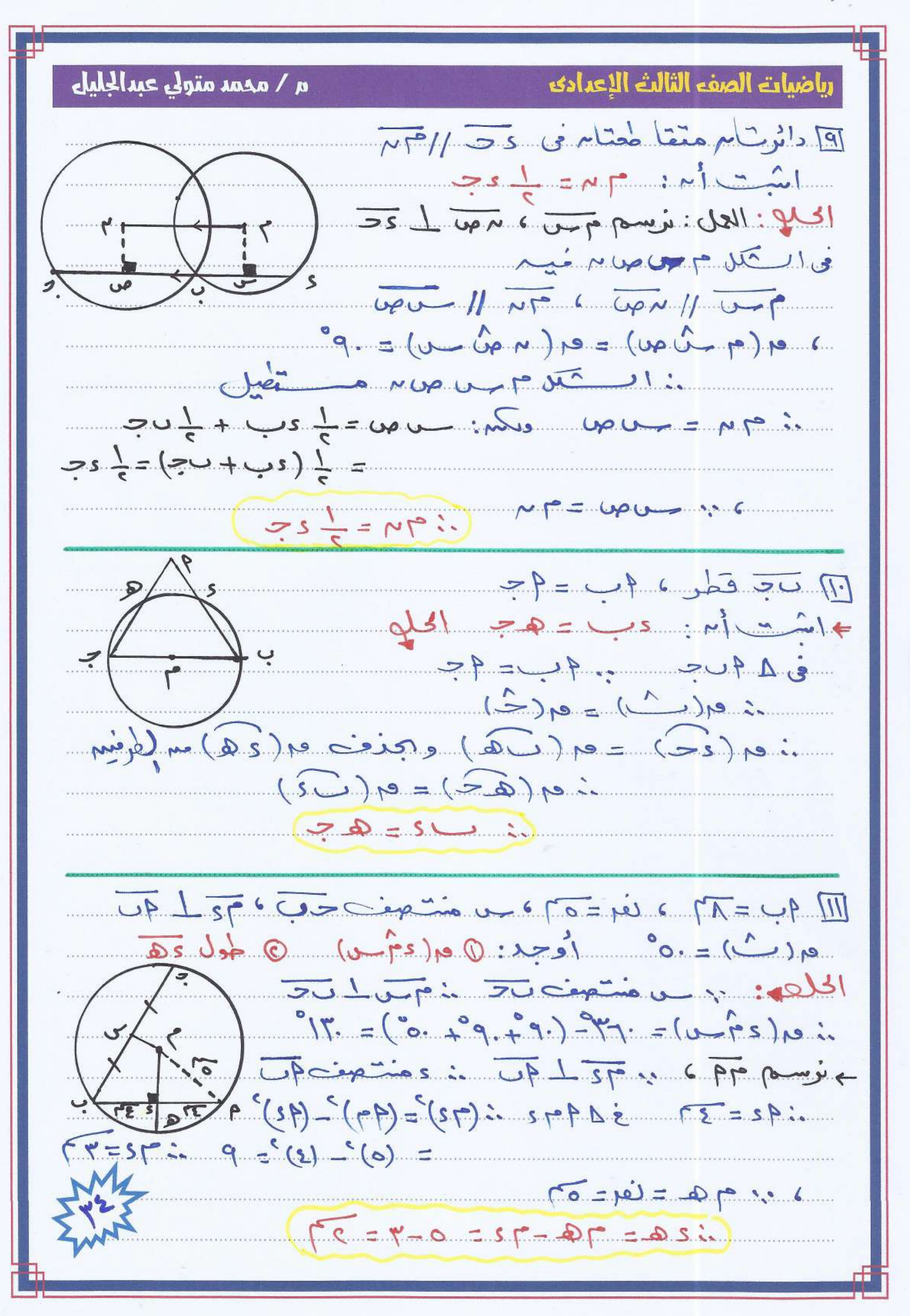
∵ م س ⊥ أ جـ ، م د ⊥ أ ب ، أ ب = أ جـ

∴ م د = م س ، ∵ م هـ = م ص = نق

بالطرح ∴ د هـ = س ص

---

" لا ينال العلم براحة الجسم "



٩ دائرتان م، ن متقاطعتان في ب، $\overline{دج}$ // $\overline{م ن}$

اثبت أن: م ن = $\frac{1}{2}$ د ج

الحل: العمل: نرسم $\overline{م س}$، $\overline{ن ص}$ ⊥ $\overline{دج}$

في الشكل م س ص ن فيه

$\overline{م س}$ // $\overline{ن ص}$، $\overline{م ن}$ // $\overline{س ص}$

، ق(∠م س ص) = ق(∠ن ص س) = ٩٠°

∴ الشكل م س ص ن مستطيل

∴ م ن = س ص ولكن: س ص = $\frac{1}{2}$ د ب + $\frac{1}{2}$ ب ج

= $\frac{1}{2}$ (د ب + ب ج) = $\frac{1}{2}$ د ج

، ∵ س ص = م ن

∴ م ن = $\frac{1}{2}$ د ج

---

١٠ $\overline{ب ج}$ قطر، أ ب = أ ج

اثبت أن: د ب = هـ ج الحل

في △ أ ب ج ∵ أ ب = أ ج

∴ ق(∠ب) = ق(∠ج)

∴ ق(⌒د ج) = ق(⌒ب هـ) وبحذف ق(⌒د هـ) من الطرفين

∴ ق(⌒هـ ج) = ق(⌒ب د)

∴ ب د = هـ ج

---

١١ أ ب = ٨ سم، نق = ٥ سم، س منتصف $\overline{ج ب}$، $\overline{م د}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

ق(∠ب) = ٥٠° أوجد: ① ق(∠د م س) ② طول $\overline{د هـ}$

الحل: ∵ س منتصف $\overline{ب ج}$ ∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{ب ج}$

∴ ق(∠د م س) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ١٣٠°

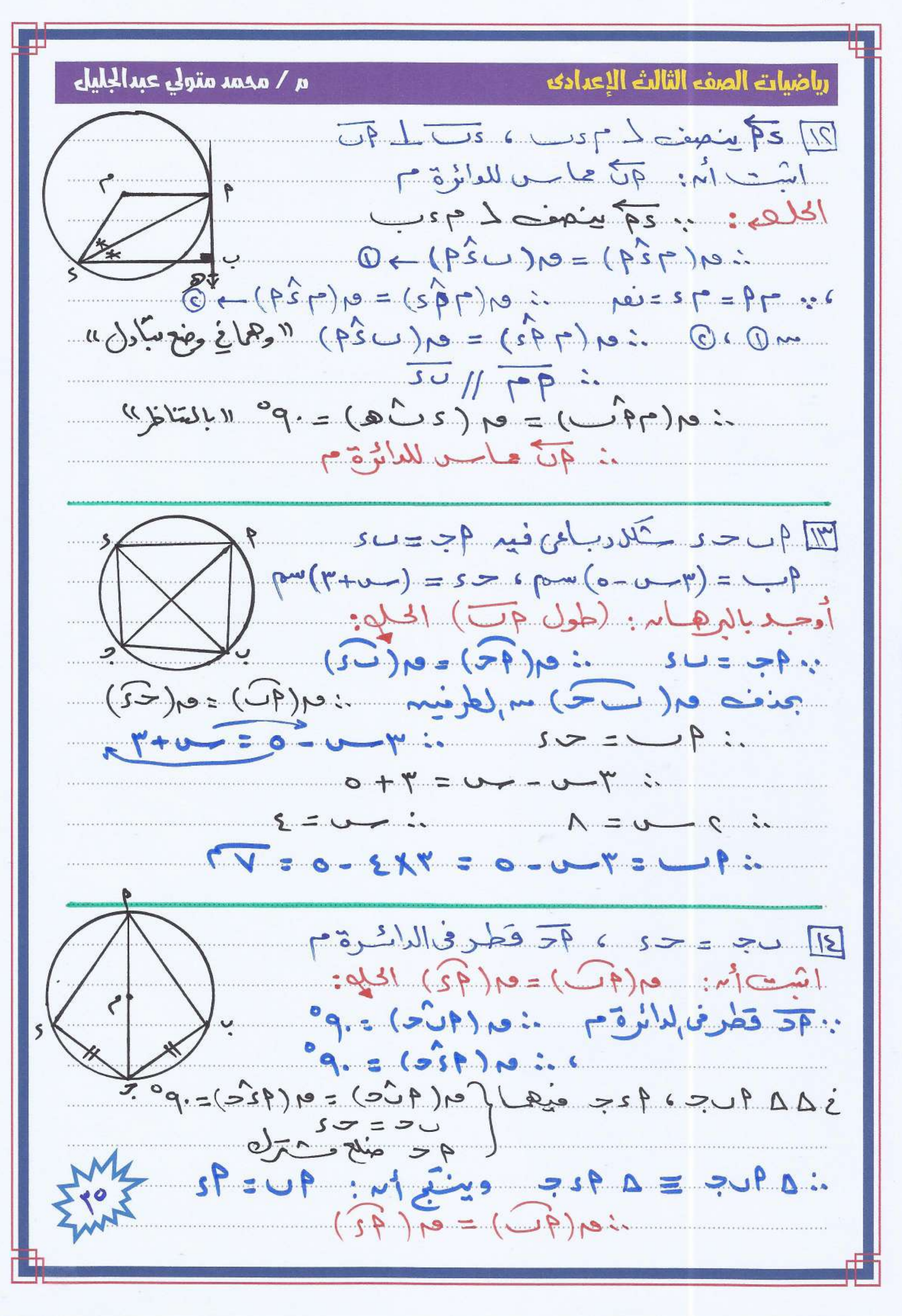
نرسم $\overline{م أ}$، ∵ $\overline{م د}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ∴ د منتصف $\overline{أ ب}$

∴ أ د = ٤ سم في △ أ م د ∴ (م د)² = (أ م)² − (أ د)²

= (٥)² − (٤)² = ٩ ∴ م د = ٣ سم

، ∵ م هـ = نق = ٥ سم

∴ د هـ = م هـ − م د = ٥ − ٣ = ٢ سم





**[١٢]** $\overrightarrow{دم}$ ينصف ∠ م د ب ، $\overline{دب} \perp \overline{أب}$

اثبت أن: $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م

**الحل:** ∵ $\overrightarrow{دم}$ ينصف ∠ م د ب

∴ ق(∠م د أ) = ق(∠ب د أ) ← ①

، ∵ م أ = م د = نق ∴ ق(∠م أ د) = ق(∠م د أ) ← ②

من ① ، ② ∴ ق(∠م أ د) = ق(∠ب د أ) "وهما في وضع تبادل"

∴ $\overline{أم} \parallel \overline{بد}$

∴ ق(∠م أ ب) = ق(∠د ب هـ) = ٩٠° "بالتناظر"

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م

---

**[١٣]** أ ب ج د شكل رباعي فيه أ ج = ب د

أ ب = (٣س − ٥) سم ، ج د = (س + ٣) سم

أوجد بالبرهان: (طول $\overline{أب}$) **الحل:**

∵ أ ج = ب د ∴ ق($\frown{أج}$) = ق($\frown{بد}$)

بحذف ق($\frown{بج}$) من الطرفين ∴ ق($\frown{أب}$) = ق($\frown{جد}$)

∴ أ ب = ج د ∴ ٣س − ٥ = س + ٣

∴ ٣س − س = ٣ + ٥

∴ ٢س = ٨ ∴ س = ٤

∴ أ ب = ٣س − ٥ = ٣ × ٤ − ٥ = ٧ سم

---

**[١٤]** ب ج = ج د ، $\overline{أج}$ قطر في الدائرة م

اثبت أن: ق($\frown{أب}$) = ق($\frown{أد}$) **الحل:**

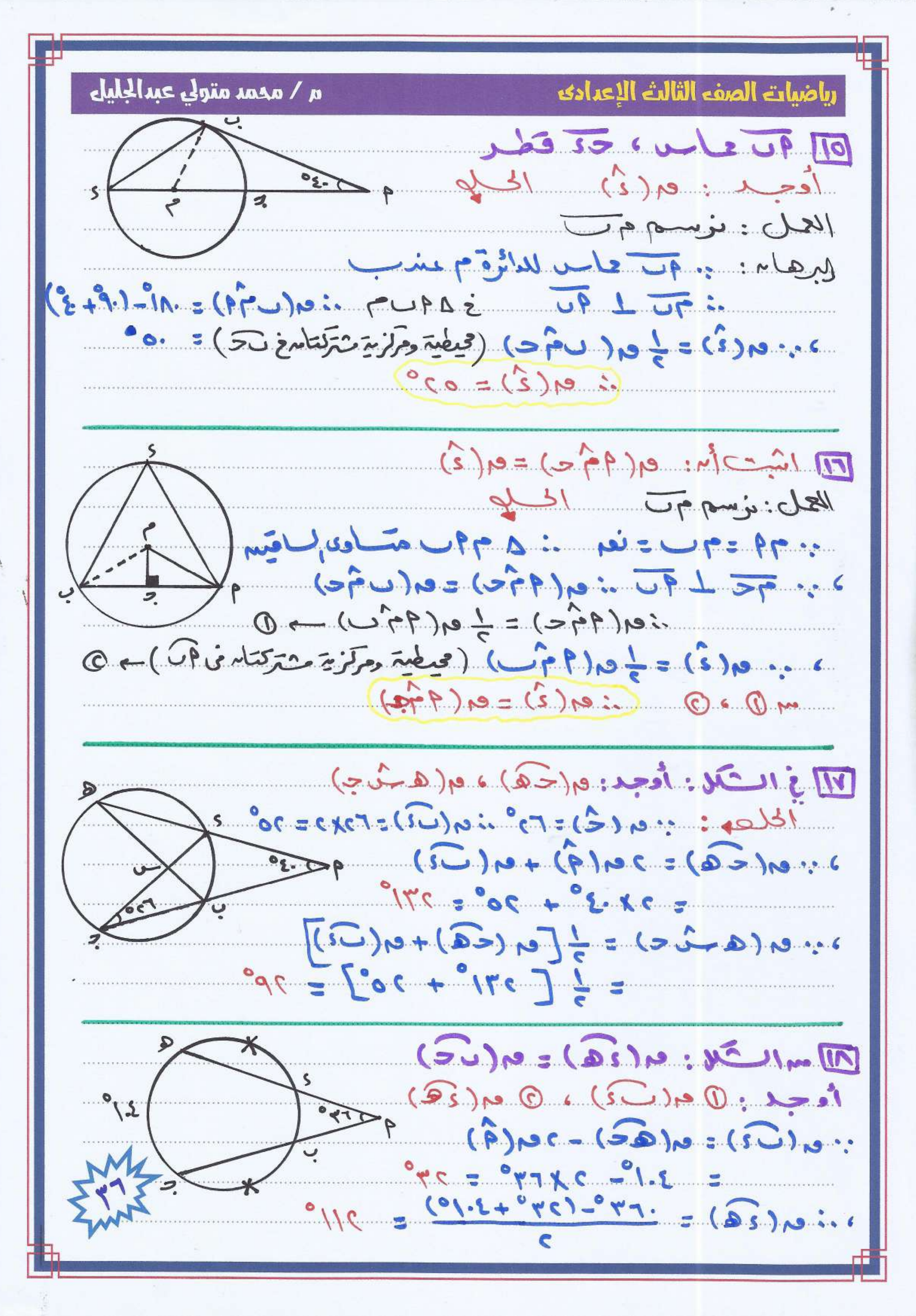
∵ $\overline{أج}$ قطر في الدائرة م ∴ ق(∠أ ب ج) = ٩٠°

، ∴ ق(∠أ د ج) = ٩٠°

في ΔΔ أ ب ج ، أ د ج فيهما:
- ق(∠أ ب ج) = ق(∠أ د ج) = ٩٠°
- ب ج = ج د
- أ ج ضلع مشترك

∴ Δ أ ب ج ≡ Δ أ د ج وينتج أن: أ ب = أ د

∴ ق($\frown{أب}$) = ق($\frown{أد}$)





**١٥** $\overline{اب}$ مماس ، $\overline{جد}$ قطر

أوجد : ق($\hat{د}$) الحل

العمل : نرسم $\overline{مب}$

البرهان : ∵ $\overline{اب}$ مماس للدائرة م عند ب

∴ $\overline{مب} \perp \overline{اب}$ في △ ا ب م ∴ ق(ب $\hat{م}$ ا) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٠°)

= ٥٠°

، ∵ ق($\hat{د}$) = $\frac{1}{2}$ ق(ب $\hat{م}$ ج) (محيطية ومركزية مشتركتان في ⌢بج)

∴ ق($\hat{د}$) = ٢٥°

**١٦** اثبت أن : ق(ا $\hat{م}$ ج) = ق($\hat{د}$)

العمل : نرسم $\overline{مب}$ الحل

∵ م ا = م ب = نق ∴ △ م ا ب متساوي الساقين

، ∵ $\overline{مج} \perp \overline{اب}$ ∴ ق(ا $\hat{م}$ ج) = ق(ب $\hat{م}$ ج)

∴ ق(ا $\hat{م}$ ج) = $\frac{1}{2}$ ق(ا $\hat{م}$ ب) ← ①

، ∵ ق($\hat{د}$) = $\frac{1}{2}$ ق(ا $\hat{م}$ ب) (محيطية ومركزية مشتركتان في ⌢اب) ← ②

من ① ، ② ∴ ق($\hat{د}$) = ق(ا $\hat{م}$ ج)

**١٧** في الشكل : أوجد : ق(⌢جه) ، ق(هـ $\hat{س}$ ج)

الحل : ∵ ق($\hat{ج}$) = ٢٦° ∴ ق(⌢بد) = ٢٦ × ٢ = ٥٢°

، ∵ ق(⌢جه) = ٢ ق($\hat{ا}$) + ق(⌢بد)

= ٢ × ٤٠° + ٥٢° = ١٣٢°

، ∵ ق(هـ $\hat{س}$ ج) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌢جه) + ق(⌢بد)]

= $\frac{1}{2}$ [١٣٢° + ٥٢°] = ٩٢°

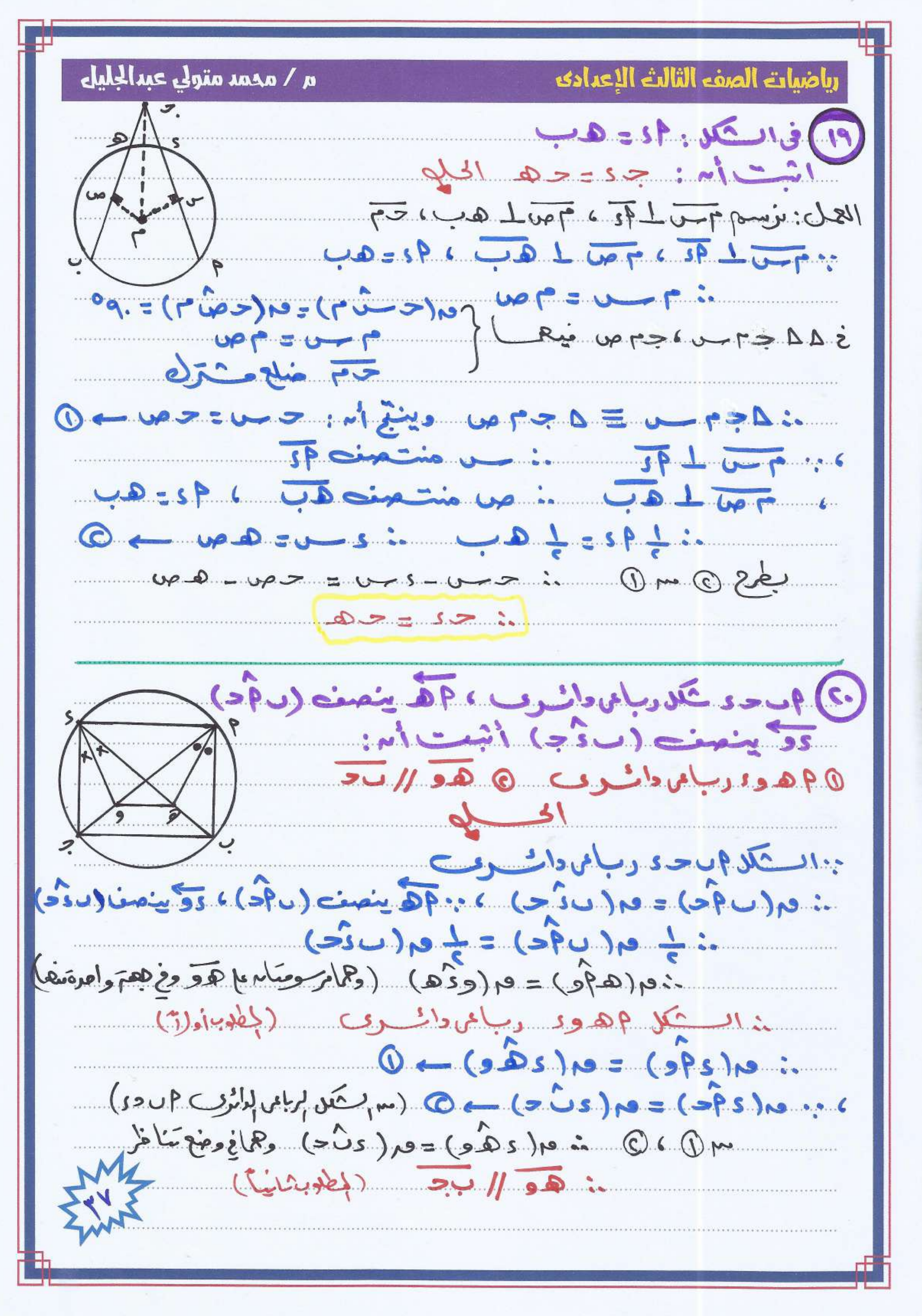
**١٨** في الشكل : ق(⌢دهـ) = ق(⌢بج)

أوجد : ① ق(⌢بد) ، ② ق(⌢دهـ)

∵ ق(⌢بد) = ق(⌢هج) − ٢ ق($\hat{ا}$)

= ١٠٤° − ٢ × ٣٦° = ٣٢°

، ∴ ق(⌢دهـ) = $\frac{٣٦٠° - (٣٢° + ١٠٤°)}{٢}$ = ١١٢°





**(19)** في الشكل : أ د = هـ ب

اثبت أن : جـ د = جـ هـ

**الحل**

العمل: نرسم $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{هـ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ م}}$

∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ د}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{هـ ب}}$ ، أ د = هـ ب

∴ م س = م ص

في ΔΔ جـ م س ، جـ م ص فيهما

ق(∠جـ س م) = ق(∠جـ ص م) = 90°

م س = م ص

$\overline{\text{جـ م}}$ ضلع مشترك

∴ Δ جـ م س ≡ Δ جـ م ص وينتج أن : جـ س = جـ ص ← (1)

، ∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ د}}$ ∴ س منتصف $\overline{\text{أ د}}$

، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{هـ ب}}$ ∴ ص منتصف $\overline{\text{هـ ب}}$ ، أ د = هـ ب

∴ $\frac{1}{2}$ أ د = $\frac{1}{2}$ هـ ب ∴ د س = هـ ص ← (2)

بطرح (2) من (1) ∴ جـ س − د س = جـ ص − هـ ص

∴ جـ د = جـ هـ

---

**(20)** أ ب جـ د شكل رباعي دائري ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف (∠ب أ جـ) ، $\overleftarrow{\text{د و}}$ ينصف (∠ب د جـ) أثبت أن :

(1) أ هـ و د رباعي دائري (2) $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

**الحل**

∵ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب د جـ) ، ∵ $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ ينصف (∠ب أ جـ) ، $\overleftarrow{\text{د و}}$ ينصف (∠ب د جـ)

∴ $\frac{1}{2}$ ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ب د جـ)

∴ ق(∠هـ أ و) = ق(∠و د هـ) (وهما مرسومتان على $\overline{\text{هـ و}}$ وفي جهة واحدة منها)

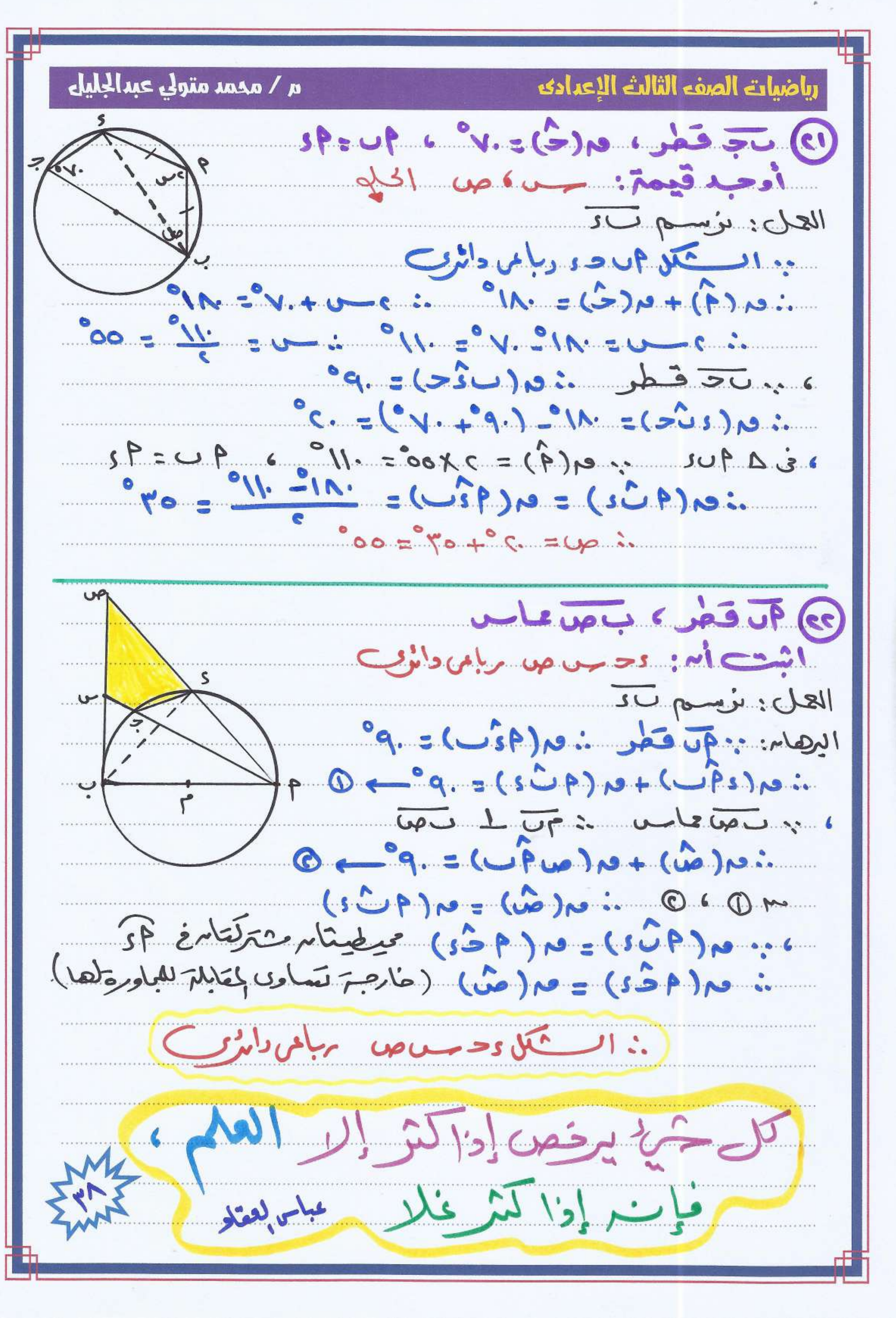
∴ الشكل أ هـ و د رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠د أ و) = ق(∠د هـ و) ← (1)

، ∵ ق(∠د أ جـ) = ق(∠د ب جـ) ← (2) (من الشكل الرباعي الدائري أ ب جـ د)

من (1) ، (2) ∴ ق(∠د هـ و) = ق(∠د ب جـ) وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (المطلوب ثانياً)





**(٢١)** ب ج قطر ، ق(ج) = ٧٠° ، أ ب = أ د

أوجد قيمة: س ، ص

الحل: نرسم ب د

∵ الشكل أ ب ج د رباعي دائري

∴ ق(أ) + ق(ج) = ١٨٠° ∴ ٢ س + ٧٠° = ١٨٠°

∴ ٢ س = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠° ∴ س = ١١٠ / ٢ = ٥٥°

، ∵ ب ج قطر ∴ ق(ب د ج) = ٩٠°

∴ ق(د ب ج) = ١٨٠° − (٩٠° + ٧٠°) = ٢٠°

، في △ أ ب د ∵ ق(أ) = ٢ × ٥٥° = ١١٠° ، أ ب = أ د

∴ ق(أ ب د) = ق(أ د ب) = (١٨٠° − ١١٠°) / ٢ = ٣٥°

∴ ص = ٢٠° + ٣٥° = ٥٥°

---

**(٢٢)** أ ب قطر ، ب ص مماس

اثبت أن: د ج س ص رباعي دائري

العمل: نرسم ب د

البرهان: ∵ أ ب قطر ∴ ق(أ د ب) = ٩٠°

∴ ق(د أ ب) + ق(أ ب د) = ٩٠° ← ①

، ∵ ب ص مماس ∴ أ ب ⊥ ب ص

∴ ق(ص) + ق(ص أ ب) = ٩٠° ← ②

من ① ، ② ∴ ق(ص) = ق(أ ب د)

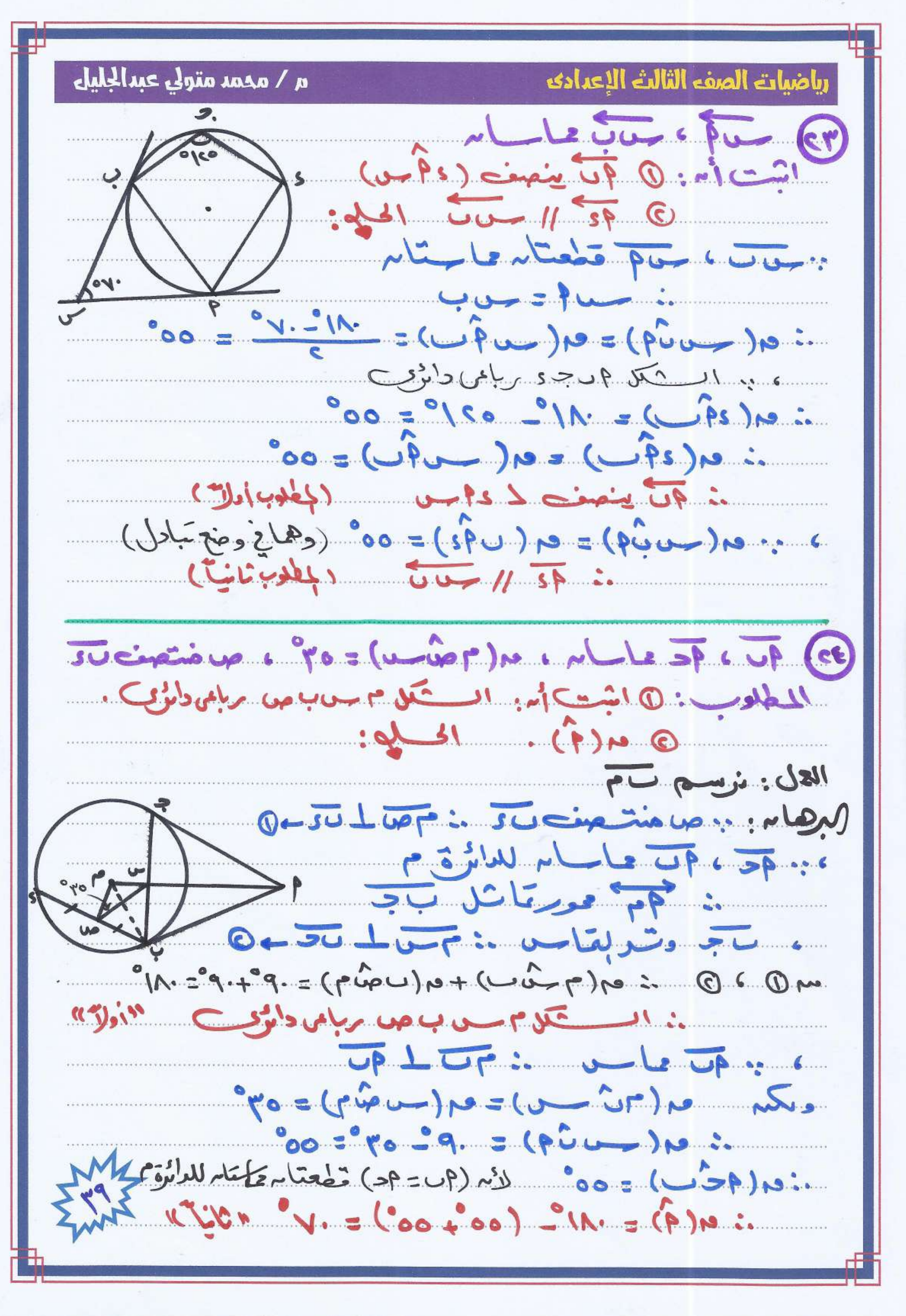
، ∵ ق(أ ب د) = ق(أ ج د) محيطيتان مشتركتان في أ د

∴ ق(أ ج د) = ق(ص) (خارجة تساوي المقابلة للمجاورة لها)

∴ الشكل د ج س ص رباعي دائري

كل شيء يرخص إذا كثر إلا العلم ، فإنه إذا كثر غلا

عباس العقاد





**(٢٣)** $\overrightarrow{سـ أ}$ ، $\overrightarrow{سـ ب}$ مماسان

اثبت أن: ① $\overrightarrow{أب}$ ينصف (∠ د أ سـ)

② $\overleftrightarrow{أد}$ // $\overleftrightarrow{سـ ب}$

الحل:

∵ $\overline{سـ ب}$ ، $\overline{سـ أ}$ قطعتان مماستان

∴ سـ أ = سـ ب

∴ ق(∠ سـ ب أ) = ق(∠ سـ أ ب) = $\frac{180° - 70°}{2}$ = 55°

، ∵ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ د أ ب) = 180° − 125° = 55°

∴ ق(∠ د أ ب) = ق(∠ سـ أ ب) = 55°

∴ $\overrightarrow{أب}$ ينصف ∠ د أ سـ (المطلوب أولاً)

، ∵ ق(∠ سـ ب أ) = ق(∠ ب أ د) = 55° (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overline{أد}$ // $\overline{سـ ب}$ (المطلوب ثانياً)

---

**(٢٤)** $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان ، ق(∠ م ص سـ) = 35° ، ص منتصف $\overline{ب د}$

المطلوب: ① اثبت أن: الشكل م سـ ب ص رباعي دائري.

② ق(∠ أ). الحل:

العمل: نرسم $\overline{ب م}$

البرهان: ∵ ص منتصف $\overline{ب د}$ ∴ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{ب د}$ ← ①

، ∵ $\overline{أجـ}$ ، $\overline{أب}$ مماسان للدائرة م

∴ $\overleftrightarrow{أم}$ محور تماثل $\overline{ب جـ}$

، $\overline{ب جـ}$ وتر تماس ∴ $\overline{م سـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ ← ②

من ① ، ② ∴ ق(∠ م سـ ب) + ق(∠ ب ص م) = 90° + 90° = 180°

∴ الشكل م سـ ب ص رباعي دائري "أولاً"

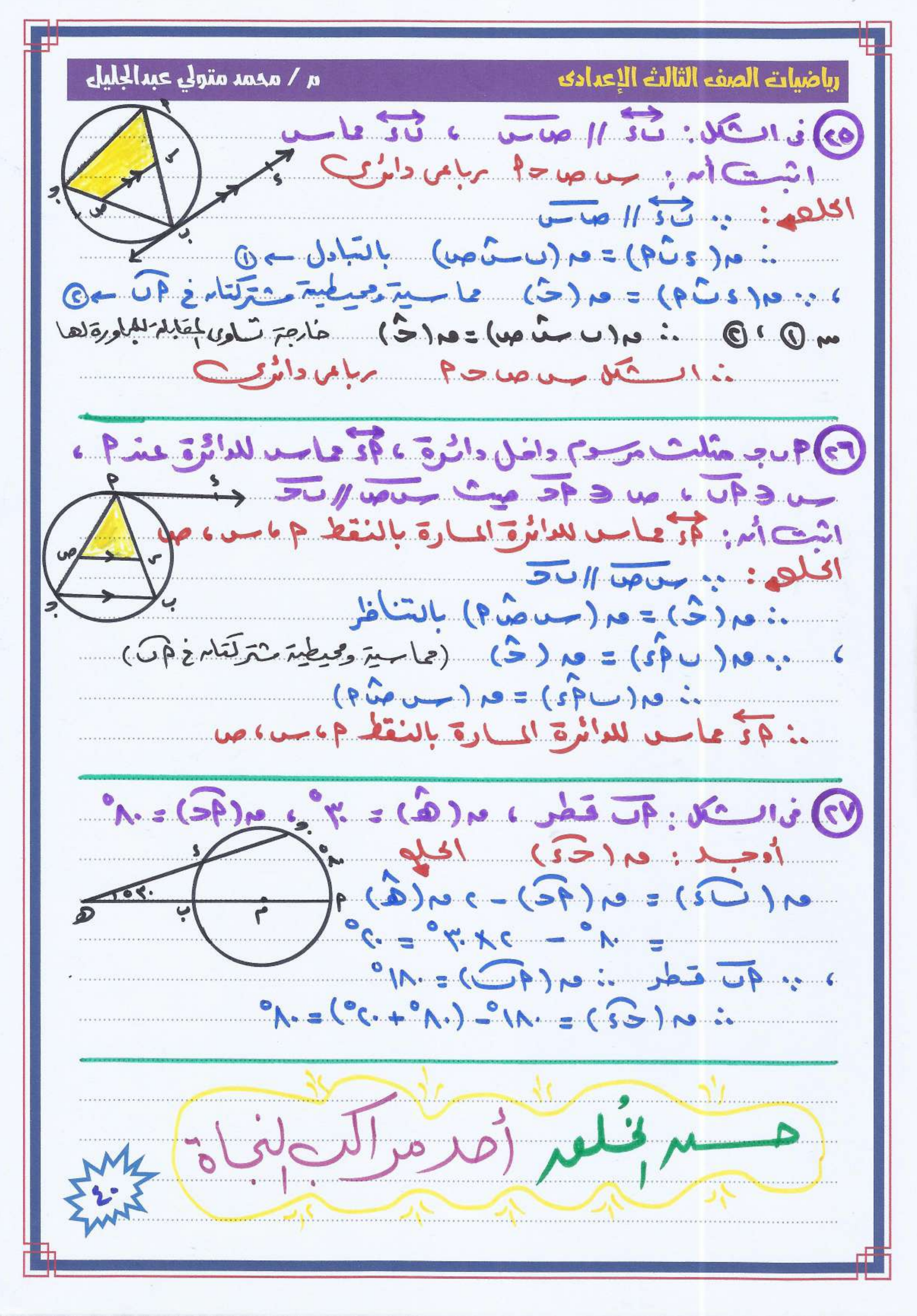
، ∵ $\overline{أب}$ مماس ∴ $\overline{م ب}$ ⊥ $\overline{أب}$

ولكن ق(∠ م ب سـ) = ق(∠ سـ ص م) = 35°

∴ ق(∠ سـ ب أ) = 90° − 35° = 55°

∴ ق(∠ أ جـ ب) = 55° لأنه (أب = أجـ) قطعتان مماستان للدائرة م

∴ ق(∠ أ) = 180° − (55° + 55°) = 70° "ثانياً"





**(٢٥)** في الشكل: $\overleftrightarrow{بد}$ // $\overline{صس}$ ، $\overleftrightarrow{بد}$ مماس

اثبت أن: س ص حـ أ رباعي دائري

**الحل:** ∵ $\overleftrightarrow{بد}$ // $\overline{صس}$

∴ ق(∠د ب أ) = ق(∠ب س ص) بالتبادل ← ①

، ∵ ق(∠د ب أ) = ق(∠حـ) مماسية ومحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{أب}$ ← ②

من ① ، ② ∴ ق(∠ب س ص) = ق(∠حـ) خارجة تساوي المقابلة للمجاورة لها

∴ الشكل س ص حـ أ رباعي دائري

---

**(٢٦)** أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة عند أ ، س ∈ $\overline{أب}$ ، ص ∈ $\overline{أحـ}$ حيث $\overline{سص}$ // $\overline{بحـ}$

اثبت أن: $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

**الحل:** ∵ $\overline{سص}$ // $\overline{بحـ}$

∴ ق(∠حـ) = ق(∠س ص أ) بالتناظر

، ∵ ق(∠ب أ د) = ق(∠حـ) (مماسية ومحيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{أب}$)

∴ ق(∠ب أ د) = ق(∠س ص أ)

∴ $\overleftrightarrow{أد}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

---

**(٢٧)** في الشكل: $\overline{أب}$ قطر ، ق(∠هـ) = ٣٠° ، ق($\overset{\frown}{أحـ}$) = ٨٠°

أوجد: ق($\overset{\frown}{حـد}$)

**الحل**

ق($\overset{\frown}{بد}$) = ق($\overset{\frown}{أحـ}$) − ٢ ق(∠هـ)

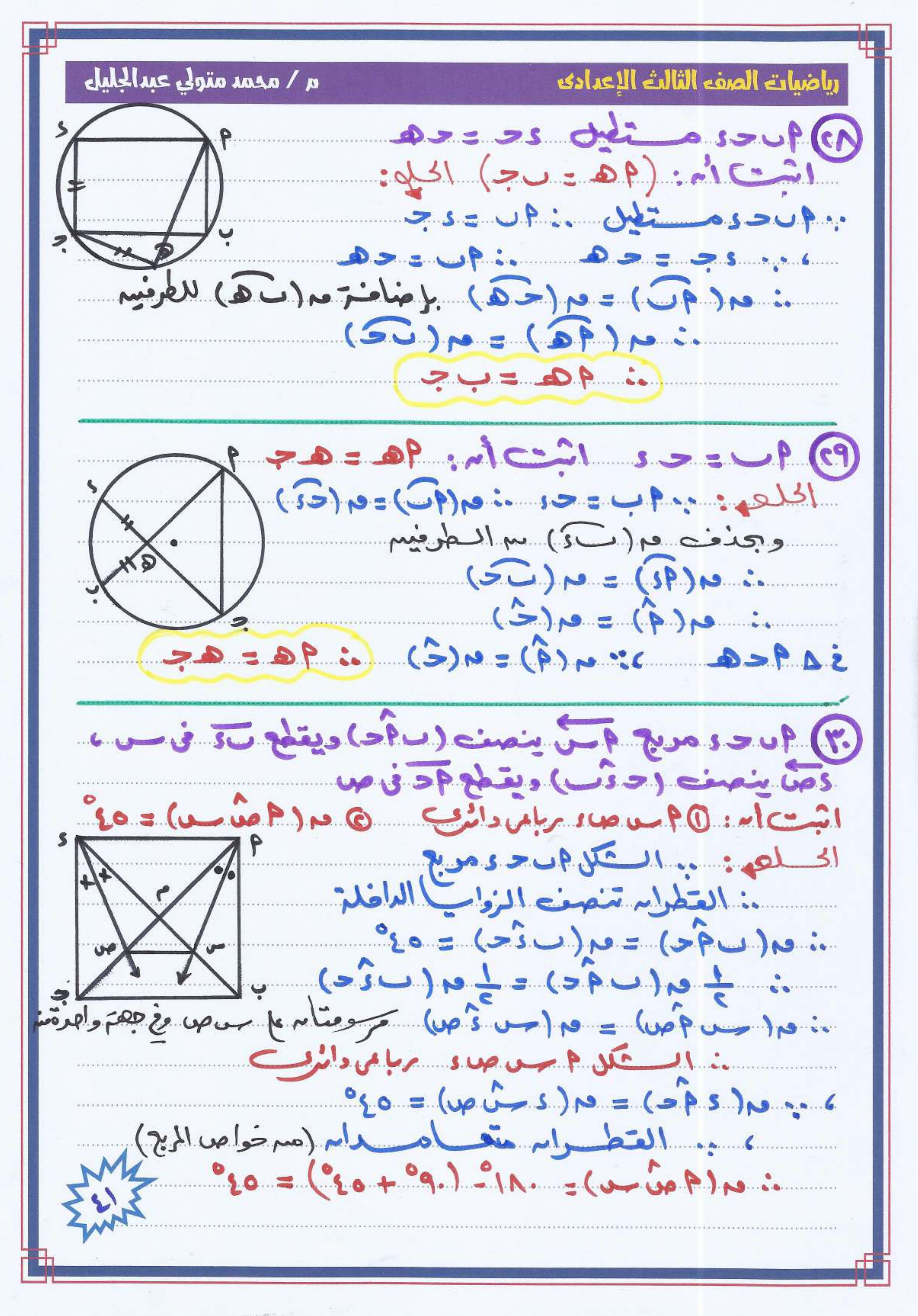
= ٨٠° − ٢ × ٣٠° = ٢٠°

، ∵ $\overline{أب}$ قطر ∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١٨٠°

∴ ق($\overset{\frown}{حـد}$) = ١٨٠° − (٨٠° + ٢٠°) = ٨٠°

---

حسن الخلق أحد مراكب النجاة



٢٨) أ ب جـ د مستطيل ، د جـ = جـ هـ
اثبت أن : ( أ هـ = ب جـ ) الحل :
∵ أ ب جـ د مستطيل ∴ أ ب = د جـ
، ∵ د جـ = جـ هـ ∴ أ ب = جـ هـ
∴ ق( ⌒أ ب ) = ق( ⌒جـ هـ ) بإضافة ق( ⌒ب هـ ) للطرفين
∴ ق( ⌒أ هـ ) = ق( ⌒ب جـ )
∴ أ هـ = ب جـ

---

٢٩) أ ب = جـ د اثبت أن : أ هـ = هـ جـ
الحل : ∵ أ ب = جـ د ∴ ق( ⌒أ ب ) = ق( ⌒جـ د )
وبحذف ق( ⌒ب د ) من الطرفين
∴ ق( ⌒أ د ) = ق( ⌒ب جـ )
∴ ق( أ̂ ) = ق( جـ̂ )
في Δ أ جـ هـ ∵ ق( أ̂ ) = ق( جـ̂ )
∴ أ هـ = هـ جـ

---

٣٠) أ ب جـ د مربع أ س→ ينصف ( ب أ̂ جـ ) ويقطع ب د في س ، د ص→ ينصف ( جـ د̂ ب ) ويقطع أ جـ في ص
اثبت أن : ① أ س ص د رباعي دائري ② ق( أ ص̂ س ) = ٤٥°
الحل : ∵ الشكل أ ب جـ د مربع
∴ القطران تنصف الزوايا الداخلة
∴ ق( ب أ̂ جـ ) = ق( ب د̂ جـ ) = ٤٥°
∴ ½ ق( ب أ̂ جـ ) = ½ ق( ب د̂ جـ )
∴ ق( س أ̂ ص ) = ق( س د̂ ص ) مرسومتان على س ص وفي جهة واحدة منه
∴ الشكل أ س ص د رباعي دائري
، ∵ ق( د أ̂ جـ ) = ق( د س̂ ص ) = ٤٥°
، ∵ القطران متعامدان ( من خواص المربع )
∴ ق( أ ص̂ س ) = ١٨٠° − ( ٩٠° + ٤٥° ) = ٤٥°



(٣١) س ، ص منتصفات $\overline{أب}$ ، $\overline{أج}$

اثبت أن: ① أ س م ص رباعي دائري

② ق(∠م س ص) = ق(∠م ج ص) ③ $\overline{أم}$ قطر الدائرة المارة بالنقط أ، س، ص، م

الحل: ∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$

، ∵ ص منتصف $\overline{أج}$ ∴ $\overline{مص} \perp \overline{أج}$

∴ ق(∠أ ص م) = ق(∠أ س م) = ٩٠°

مرسومتان على $\overline{أم}$ وفي جهة واحدة منه

∴ الشكل أ س م ص رباعي دائري «أولاً»

∴ ق(∠م أ ص) = ق(∠م س ص)

، ق(∠م أ ص) = ق(∠م ج ص) (لأنه م أ = م ج = نق)

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م ج ص) «ثانياً»

∵ ق(∠أ ص م) = ٩٠° ، ق(∠أ س م) = ٩٠° مرسومتان على $\overline{أم}$

∴ $\overline{أم}$ قطر للدائرة المارة بالنقط أ، س، ص، م

---

(٣٢) $\overline{جد}$ قطر $\perp$ $\overline{أب}$ ، $\overline{سب}$ قطر

اثبت أن: ① ج س ص هـ رباعي دائري

② ق(∠د ص ب) = ق(∠د ب س)

الحل: ∵ $\overline{جد}$ قطر ∴ ق(∠ج س د) = ٩٠°

∴ ق(∠ج س ص) + ق(∠ص هـ ج) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

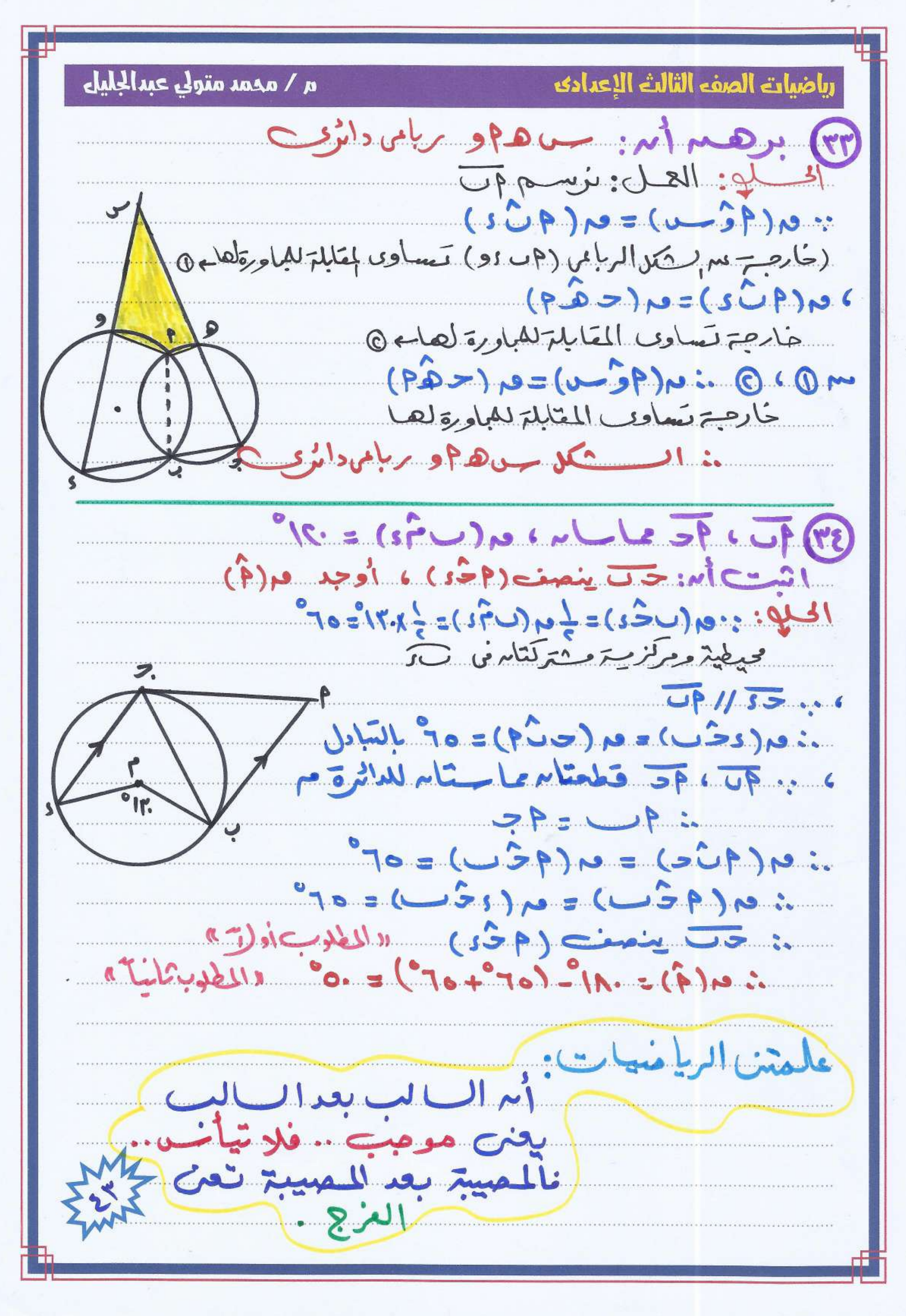
∴ الشكل ج س ص هـ رباعي دائري

، ∵ ق(∠د ص ب) = ق(∠ج) (خارجة تساوي المقابلة للمجاورة لها)

، ق(∠ج) = ق(∠د ب س) محيطيتان مشتركتان في ($\overset{\frown}{سد}$)

∴ ق(∠د ص ب) = ق(∠د ب س) «المطلوب ثانياً»

الصلاة عماد الدين فحافظ عليها




**(٣٣) برهن أن: س هـ أ و رباعي دائري**

الحل: العمل: نرسم $\overline{أب}$

∵ ق(∠أ و س) = ق(∠أ ب د)

(خارجة عن الشكل الرباعي (أ ب د و) تساوي المقابلة للمجاورة لها) ①

، ق(∠أ ب د) = ق(∠جـ هـ أ)

خارجة تساوي المقابلة للمجاورة لها ②

من ①، ② ∴ ق(∠أ و س) = ق(∠جـ هـ أ)

خارجة تساوي المقابلة للمجاورة لها

∴ الشكل س هـ أ و رباعي دائري



---

**(٣٤) $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ مماسان ، ق(∠ب م د) = ١٢٠°**

**اثبت أن: $\overline{جـب}$ ينصف (∠أ جـ د) ، أوجد ق(∠أ)**

الحل: ∵ ق(∠ب جـ د) = ½ ق(∠ب م د) = ½ × ١٢٠° = ٦٥°

محيطية ومركزية مشتركتان في $\overset{\frown}{ب د}$

، ∵ $\overline{جـ د}$ // $\overline{أب}$

∴ ق(∠د جـ ب) = ق(∠جـ ب أ) = ٦٥° بالتبادل

، ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أب = أجـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٦٥°

∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠د جـ ب) = ٦٥°

∴ $\overline{جـب}$ ينصف (∠أ جـ د) «المطلوب أولاً»

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠° «المطلوب ثانياً»



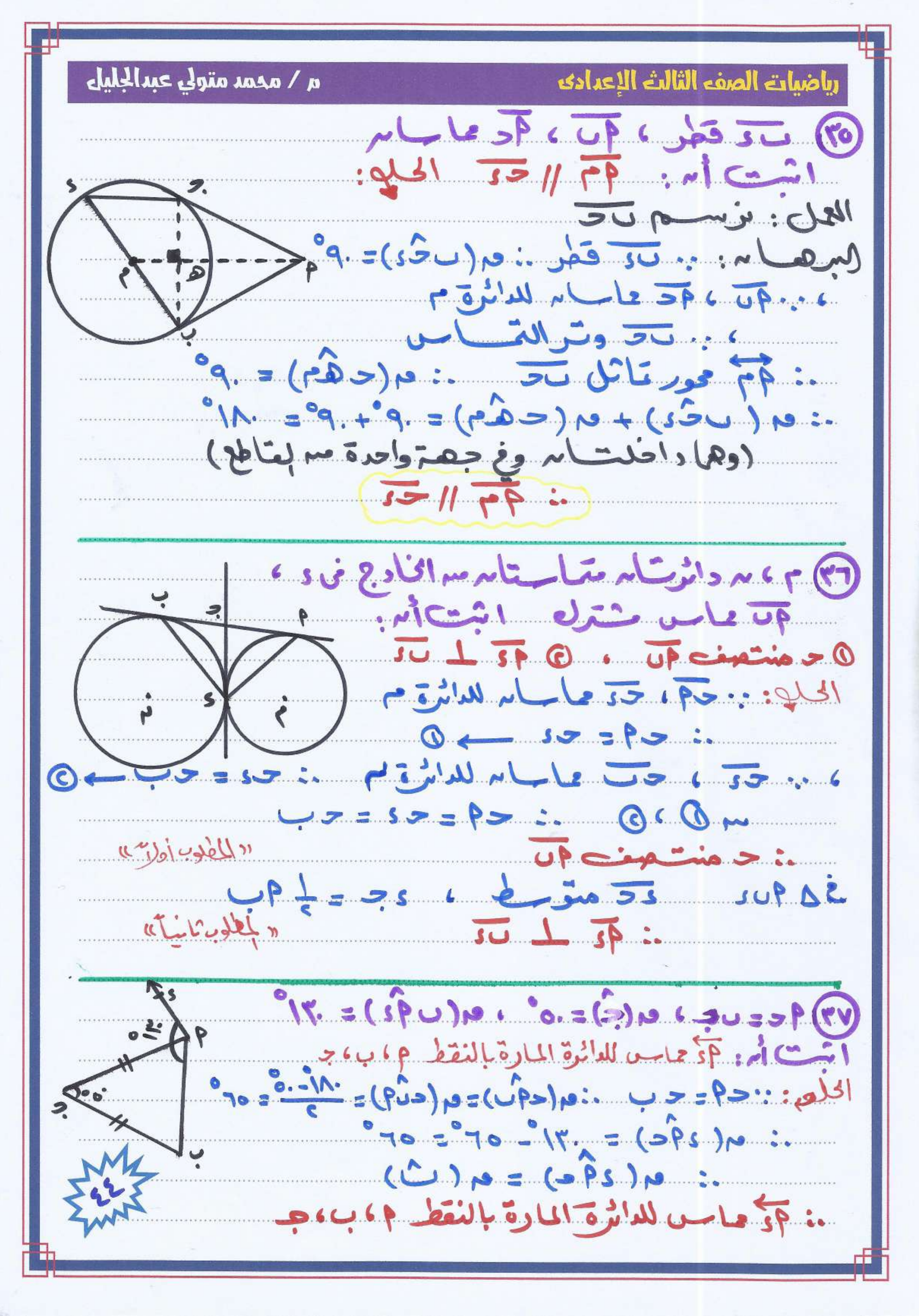
علمتني الرياضيات:

أن السالب بعد السالب

يعني موجب .. فلا تيأس..

فالمصيبة بعد المصيبة تعني

العزم.





(٣٥) $\overline{ب د}$ قطر ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ مماسان

اثبت أن: $\overline{أ م} \parallel \overline{جـ د}$ الحل:

العمل: نرسم $\overline{ب جـ}$

البرهان: ∵ $\overline{ب د}$ قطر ∴ ق(∠ب جـ د) = ٩٠°

، ∵ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ مماسان للدائرة م

، ∴ $\overline{ب جـ}$ وتر التماس

∴ $\overleftrightarrow{أ م}$ محور تماثل $\overline{ب جـ}$ ∴ ق(∠جـ هـ م) = ٩٠°

∴ ق(∠ب جـ د) + ق(∠جـ هـ م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

(وهما داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع)

∴ $\overline{أ م} \parallel \overline{جـ د}$

---

(٣٦) م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في د ، $\overline{أ ب}$ مماس مشترك اثبت أن:

① جـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، ② $\overline{أ د} \perp \overline{ب د}$

الحل: ∵ $\overline{جـ أ}$ ، $\overline{جـ د}$ مماسان للدائرة م

∴ جـ أ = جـ د ← ①

، ∵ $\overline{جـ د}$ ، $\overline{جـ ب}$ مماسان للدائرة ن ∴ جـ د = جـ ب ← ②

من ① ، ② ∴ جـ أ = جـ د = جـ ب

∴ جـ منتصف $\overline{أ ب}$ «المطلوب أولاً»

في Δ أ ب د $\overline{د جـ}$ متوسط ، د جـ = $\frac{1}{2}$ أ ب

∴ $\overline{أ د} \perp \overline{ب د}$ «المطلوب ثانياً»

---

(٣٧) أ جـ = ب جـ ، ق(∠جـ) = ٥٠° ، ق(∠ب أ د) = ١٣٠°

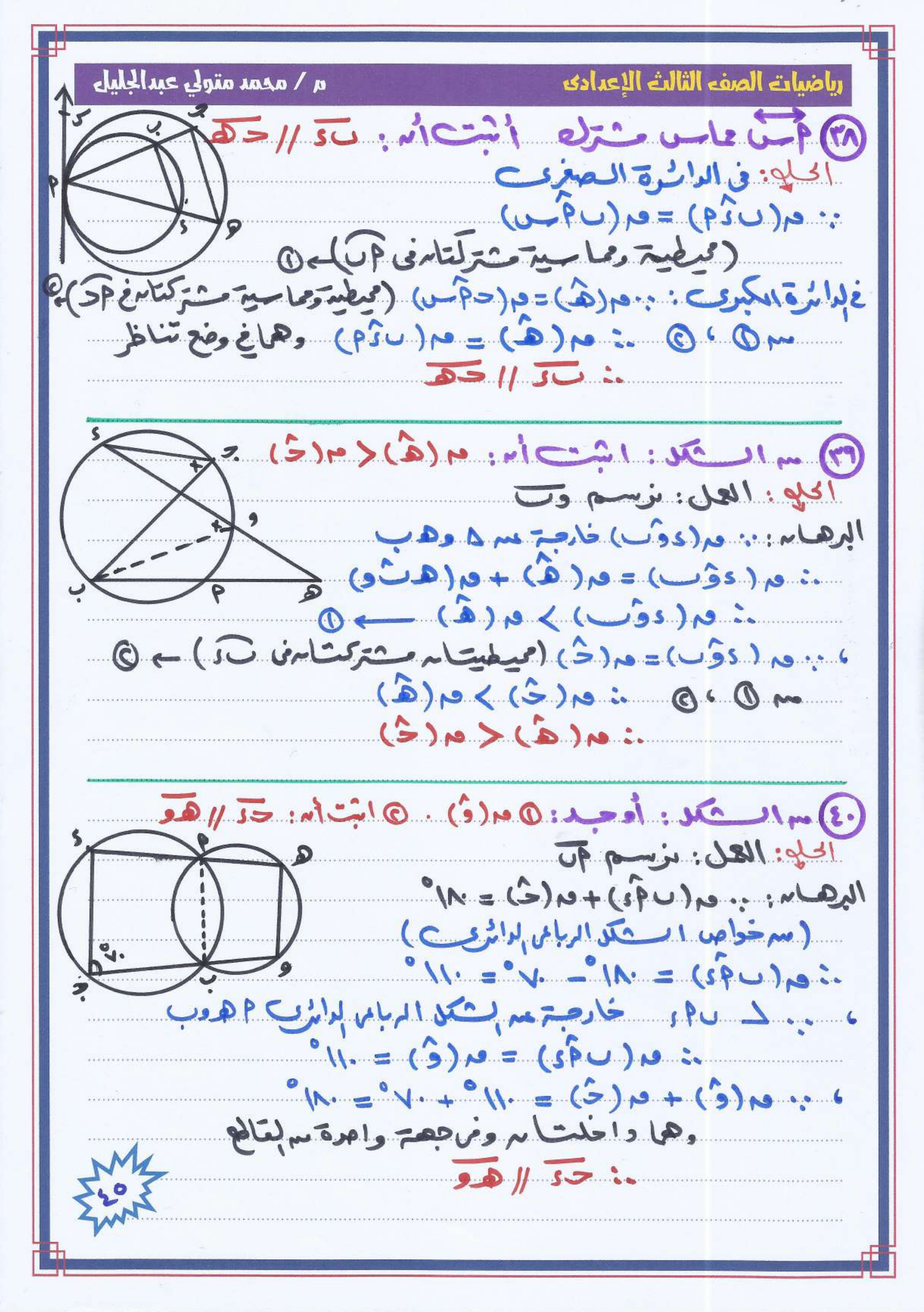
اثبت أن: $\overleftrightarrow{أ د}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

الحل: ∵ جـ أ = جـ ب ∴ ق(∠جـ أ ب) = ق(∠جـ ب أ) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = ٦٥°

∴ ق(∠د أ جـ) = ١٣٠° − ٦٥° = ٦٥°

∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠ب)

∴ $\overleftrightarrow{أ د}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ





(٣٨) أس ↔ مماس مشترك أثبت أن: ب‾ء // جـ‾هـ

الحل: في الدائرة الصغرى

∵ ق(∠ب ء أ) = ق(∠ب أ س)

(محيطية ومماسية مشتركتان في ⌒أب) ← ①

في الدائرة الكبرى: ∵ ق(∠هـ) = ق(∠جـ أ س) (محيطية ومماسية مشتركتان في ⌒أجـ) ②

من ①، ② ∴ ق(∠هـ) = ق(∠ب ء أ) وهما في وضع تناظر

∴ ب‾ء // جـ‾هـ

(٣٩) من الشكل: اثبت أن: ق(∠هـ) < ق(∠جـ)

الحل: العمل: نرسم و‾ب

البرهان: ∵ ق(∠ء و ب) خارجة عن △ و هـ ب

∴ ق(∠ء و ب) = ق(∠هـ) + ق(∠هـ ب و)

∴ ق(∠ء و ب) > ق(∠هـ) ← ①

، ∵ ق(∠ء و ب) = ق(∠جـ) (محيطيتان مشتركتان في ⌒بء) ← ②

من ①، ② ∴ ق(∠جـ) > ق(∠هـ)

∴ ق(∠هـ) < ق(∠جـ)

(٤٠) من الشكل: أوجد: ① ق(∠و) . ② اثبت أن: جـ‾ء // هـ‾و

الحل: العمل: نرسم أ‾ب

البرهان: ∵ ق(∠ب أ ء) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

(من خواص الشكل الرباعي الدائري)

∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

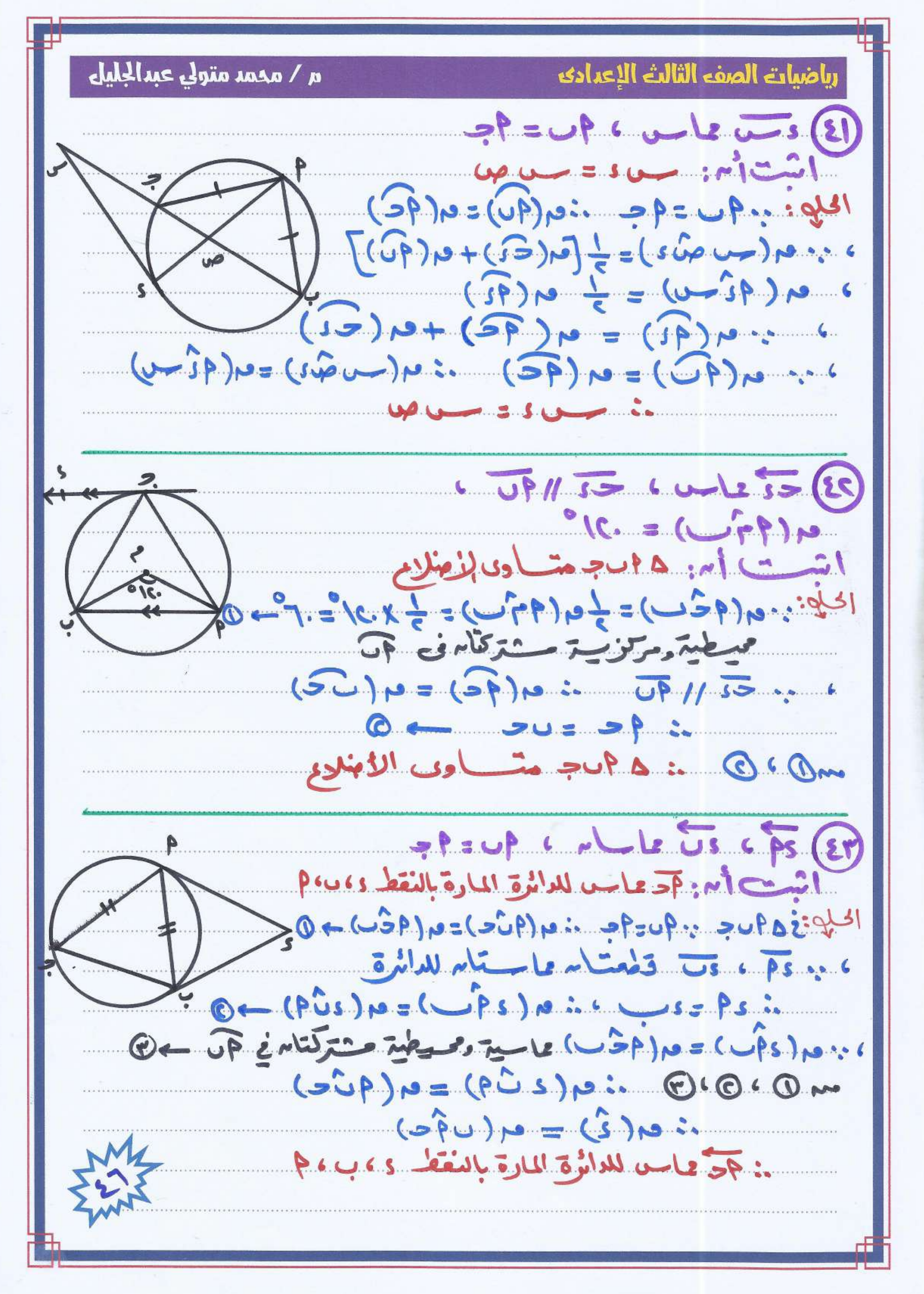
، ∵ ∠ب أ ء خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ هـ و ب

∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠و) = ١١٠°

، ∵ ق(∠و) + ق(∠جـ) = ١١٠° + ٧٠° = ١٨٠°

وهما داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع

∴ جـ‾ء // هـ‾و





**(٤١)** د س مماس ، أ ب = أ جـ

اثبت أن: س د = س ص

الحل: ∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(⌒أ ب) = ق(⌒أ جـ)

، ∵ ق(∠س ص د) = ½ [ق(⌒جـ د) + ق(⌒أ ب)]

، ق(∠أ د س) = ½ ق(⌒أ د)

، ∵ ق(⌒أ د) = ق(⌒أ جـ) + ق(⌒جـ د)

، ∵ ق(⌒أ ب) = ق(⌒أ جـ) ∴ ق(∠س ص د) = ق(∠أ د س)

∴ س د = س ص

---

**(٤٢)** جـ د مماس ، جـ د // أ ب ، ق(∠أ م ب) = ١٢٠°

اثبت أن: △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

الحل: ∵ ق(∠أ جـ ب) = ½ ق(∠أ م ب) = ½ × ١٢٠° = ٦٠° ← ①

محيطية ومركزية مشتركتان فى ⌒أ ب

، ∵ جـ د // أ ب ∴ ق(⌒أ جـ) = ق(⌒ب جـ)

∴ أ جـ = ب جـ ← ②

من ① ، ② ∴ △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

---

**(٤٣)** د أ ، د ب مماسان ، أ ب = أ جـ

اثبت أن: أ جـ مماس للدائرة المارة بالنقط د ، ب ، أ

الحل: فى △ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) ← ①

، ∵ د أ ، د ب قطعتان مماستان للدائرة

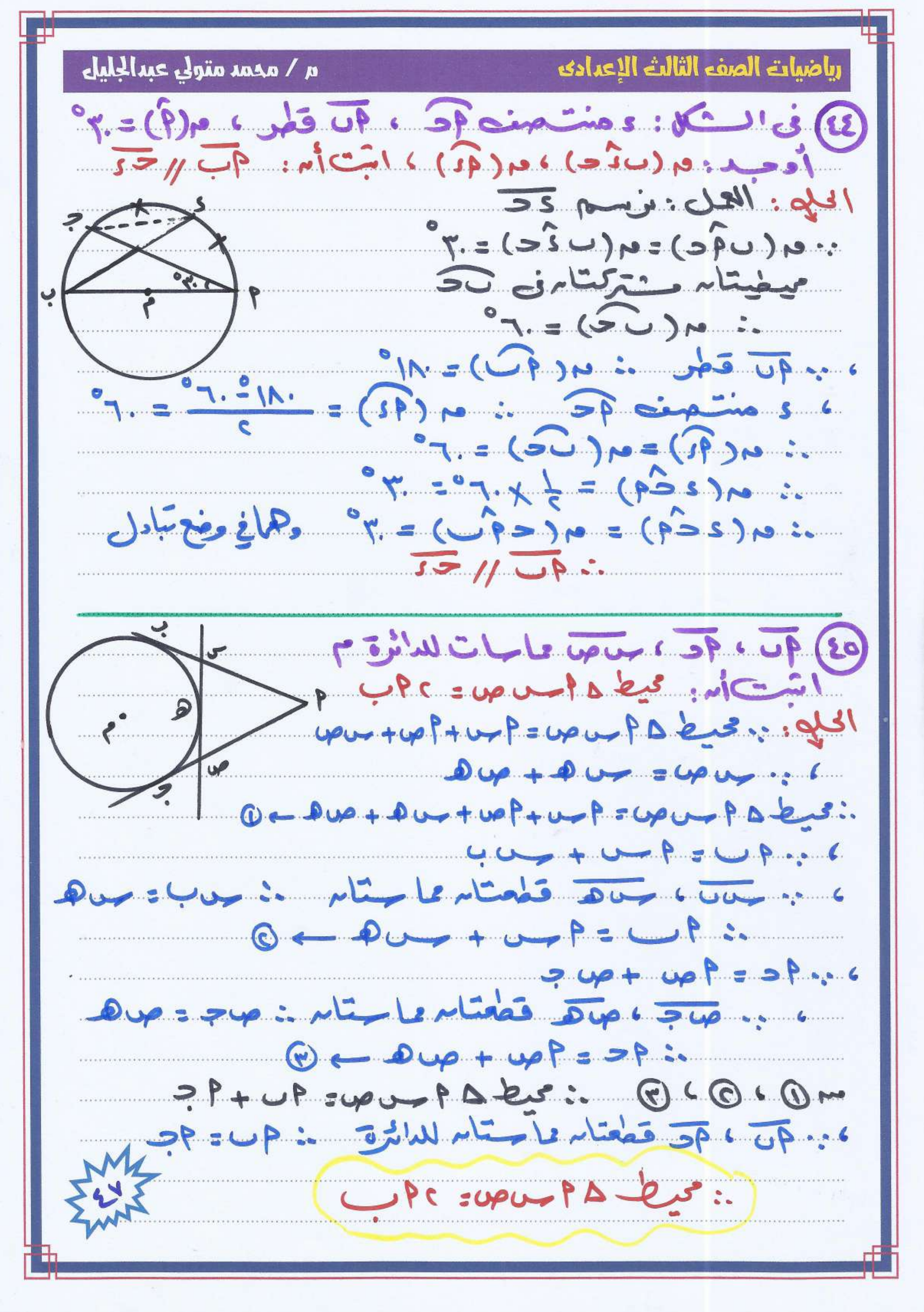
∴ د أ = د ب ∴ ق(∠د أ ب) = ق(∠د ب أ) ← ②

، ∵ ق(∠د أ ب) = ق(∠أ جـ ب) مماسية ومحيطية مشتركتان فى ⌒أ ب ← ③

من ① ، ② ، ③ ∴ ق(∠د ب أ) = ق(∠أ ب جـ)

∴ ق(∠د) = ق(∠ب أ جـ)

∴ أ جـ مماس للدائرة المارة بالنقط د ، ب ، أ





**(٤٤)** في الشكل: د منتصف $\overset{\frown}{أجـ}$ ، $\overline{أب}$ قطر ، م($\hat{أ}$) = ٣٠°

أوجد: م($ب\hat{د}جـ$) ، م($\overset{\frown}{أد}$) ، اثبت أن: $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$

الحل: العمل: نرسم $\overline{دجـ}$

∵ م($ب\hat{أ}جـ$) = م($ب\hat{د}جـ$) = ٣٠°

محيطيتان مشتركتان في $\overset{\frown}{بجـ}$

∴ م($\overset{\frown}{بجـ}$) = ٦٠°

، ∵ $\overline{أب}$ قطر ∴ م($\overset{\frown}{أب}$) = ١٨٠°

، د منتصف $\overset{\frown}{أجـ}$ ∴ م($\overset{\frown}{أد}$) = $\frac{١٨٠° - ٦٠°}{٢}$ = ٦٠°

∴ م($\overset{\frown}{أد}$) = م($\overset{\frown}{بجـ}$) = ٦٠°

∴ م($د\hat{جـ}أ$) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠° = ٣٠°

∴ م($د\hat{جـ}أ$) = م($جـ\hat{أ}ب$) = ٣٠° وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$

---

**(٤٥)** $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ ، $\overline{سص}$ مماسات للدائرة م

اثبت أن: محيط △ أ س ص = ٢ أ ب

الحل: ∵ محيط △ أ س ص = أ س + أ ص + س ص

، ∵ س ص = س هـ + ص هـ

∴ محيط △ أ س ص = أ س + أ ص + س هـ + ص هـ ← ①

، ∵ أ ب = أ س + س ب

، ∵ $\overline{سب}$ ، $\overline{سهـ}$ قطعتان مماستان ∴ س ب = س هـ

∴ أ ب = أ س + س هـ ← ②

، ∵ أ جـ = أ ص + ص جـ

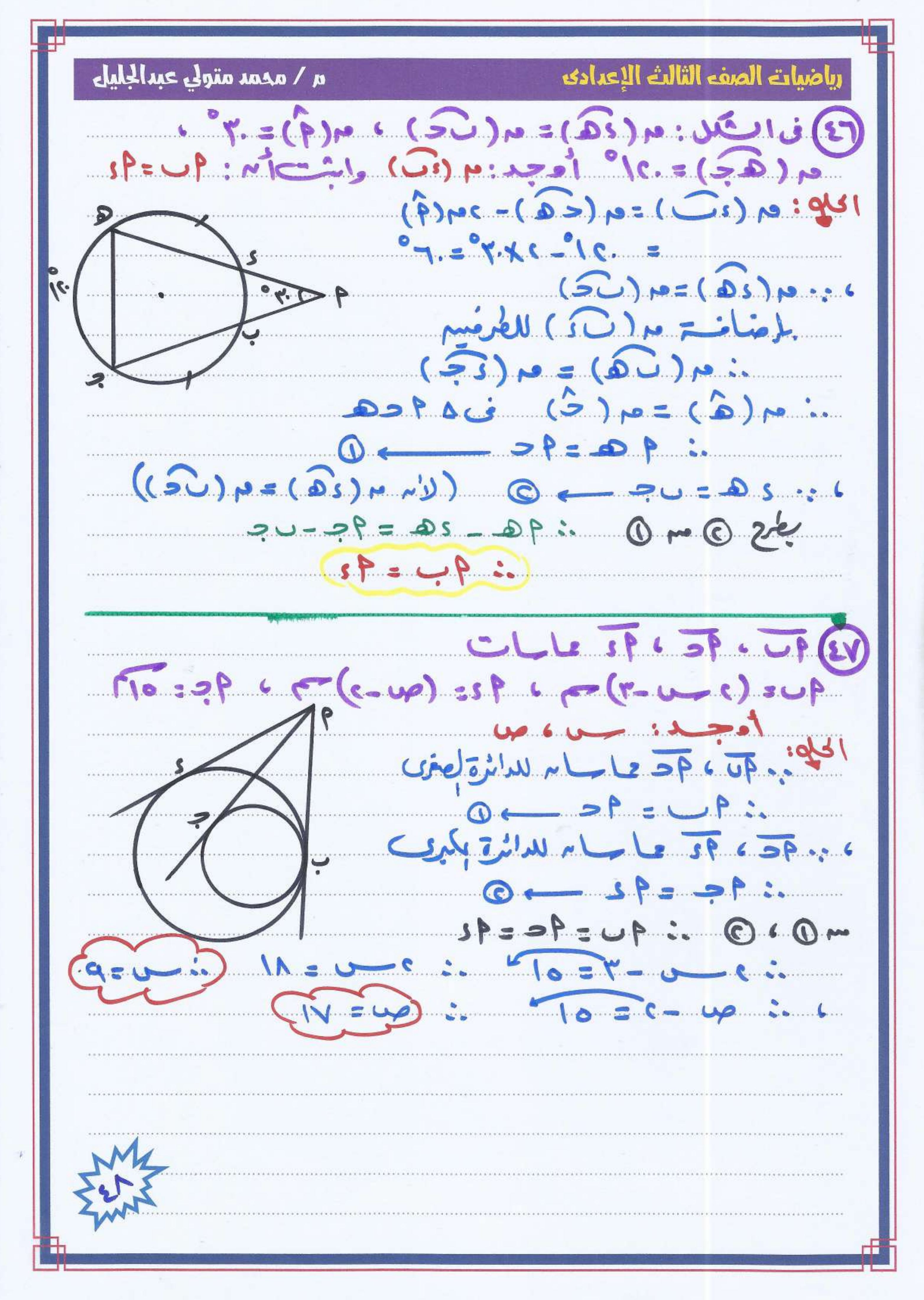
، ∵ $\overline{صجـ}$ ، $\overline{صهـ}$ قطعتان مماستان ∴ ص جـ = ص هـ

∴ أ جـ = أ ص + ص هـ ← ③

من ① ، ② ، ③ ∴ محيط △ أ س ص = أ ب + أ جـ

، ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة ∴ أ ب = أ جـ

∴ محيط △ أ س ص = ٢ أ ب



**(٤٦)** في الشكل: م(⌢ده) = م(⌢بج) ، م(∠أ) = ٣٠° ، م(⌢هج) = ١٢٠° أوجد: م(⌢دب) وأثبت أن: أب = أد

**الحل:** م(⌢دب) = م(⌢جه) − ٢م(∠أ)

= ١٢٠° − ٢ × ٣٠° = ٦٠°

∵ م(⌢ده) = م(⌢بج)

بإضافة م(⌢بد) للطرفين

∴ م(⌢بده) = م(⌢دبج)

∴ م(∠ه) = م(∠ج) في △ أجه

∴ أه = أج ← ①

∵ ده = بج ← ② (لأن م(⌢ده) = م(⌢بج))

بطرح ② من ① ∴ أه − ده = أج − بج

∴ أب = أد

---

**(٤٧)** أب ، أج ، أد مماسات

أب = (٢س − ٣) سم ، أد = (ص − ٢) سم ، أج = ١٥ سم

أوجد: س ، ص

**الحل:** ∵ أب ، أج مماسان للدائرة الصغرى

∴ أب = أج ← ①

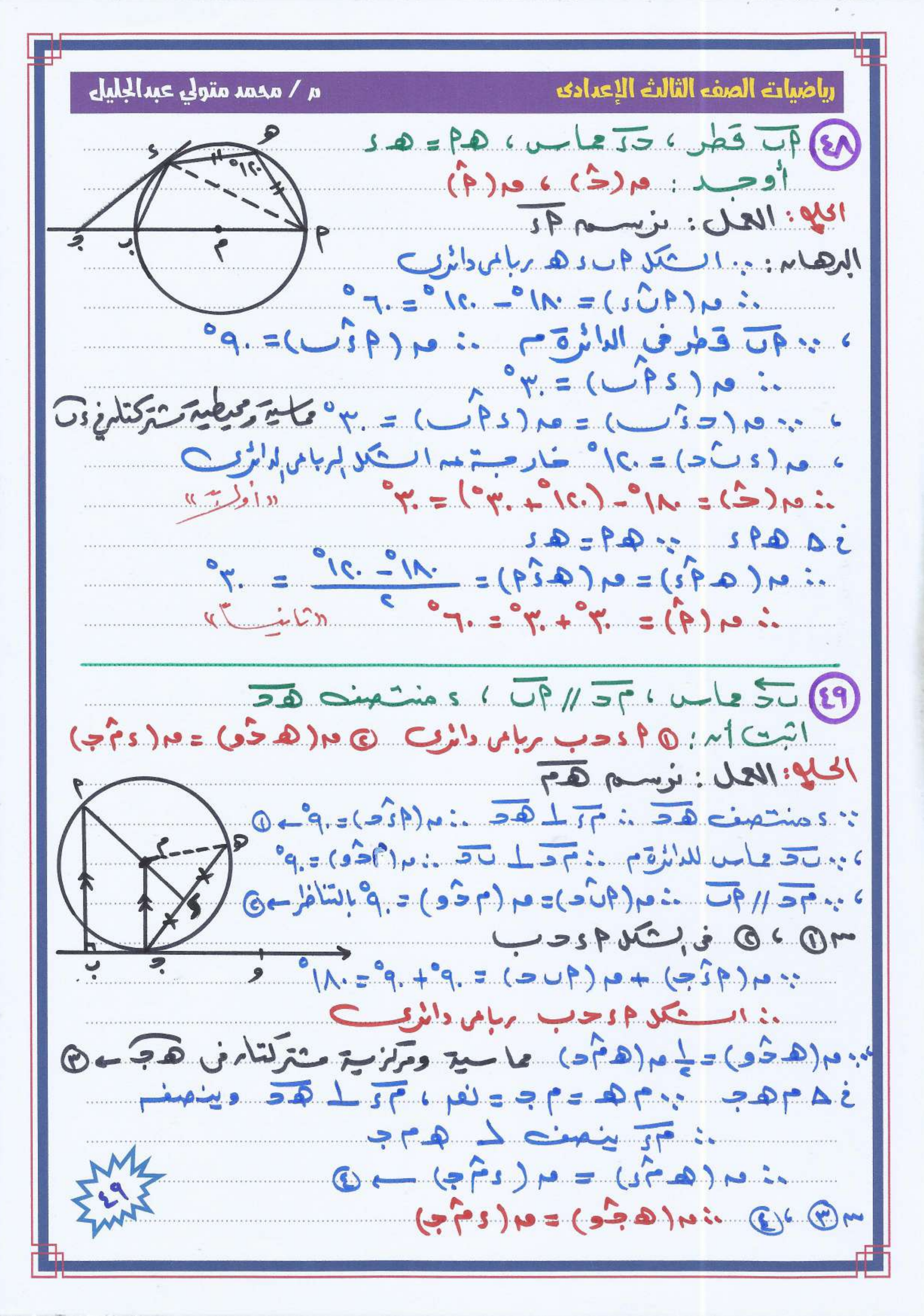
∵ أج ، أد مماسان للدائرة الكبرى

∴ أج = أد ← ②

من ① ، ② ∴ أب = أج = أد = ١٥

∴ ٢س − ٣ = ١٥ ∴ ٢س = ١٨ ∴ س = ٩

، ∴ ص − ٢ = ١٥ ∴ ص = ١٧



**(٤٨)** $\overline{أب}$ قطر ، $\overleftrightarrow{جـ د}$ مماس ، هـ أ = هـ د

أوجد : ق(∠جـ) ، ق(∠أ)

**الحل:** العمل: نرسم $\overline{أد}$

البرهان: ∵ الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

∴ ق(∠أ ب د) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠°

، ∵ $\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠°

∴ ق(∠د أ ب) = ٣٠°

، ∵ ق(∠جـ د ب) = ق(∠د أ ب) = ٣٠° مماسية ومحيطية تشتركان في $\overset{\frown}{د ب}$

، ق(∠د ب جـ) = ١٢٠° خارجة عن الشكل الرباعي الدائري

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − (١٢٠° + ٣٠°) = ٣٠° «أولاً»

في △ هـ أ د ∵ هـ أ = هـ د

∴ ق(∠هـ أ د) = ق(∠هـ د أ) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠°

∴ ق(∠أ) = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠° «ثانياً»

---

**(٤٩)** $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس ، $\overline{م جـ}$ // $\overline{أب}$ ، د منتصف $\overline{هـ جـ}$

اثبت أن : ① أ د جـ ب رباعي دائري ② ق(∠هـ جـ و) = ق(∠د م جـ)

**الحل:** العمل : نرسم $\overline{هـ م}$

∵ د منتصف $\overline{هـ جـ}$ ∴ $\overline{م د}$ ⊥ $\overline{هـ جـ}$ ∴ ق(∠أ د جـ) = ٩٠° ← ①

، ∵ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة م ∴ $\overline{م جـ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ب جـ}$ ∴ ق(∠م جـ و) = ٩٠°

، ∵ $\overline{م جـ}$ // $\overline{أب}$ ∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠م جـ و) = ٩٠° بالتناظر ← ②

من ① ، ② في الشكل أ د جـ ب

∵ ق(∠أ د جـ) + ق(∠أ ب جـ) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ د جـ ب رباعي دائري

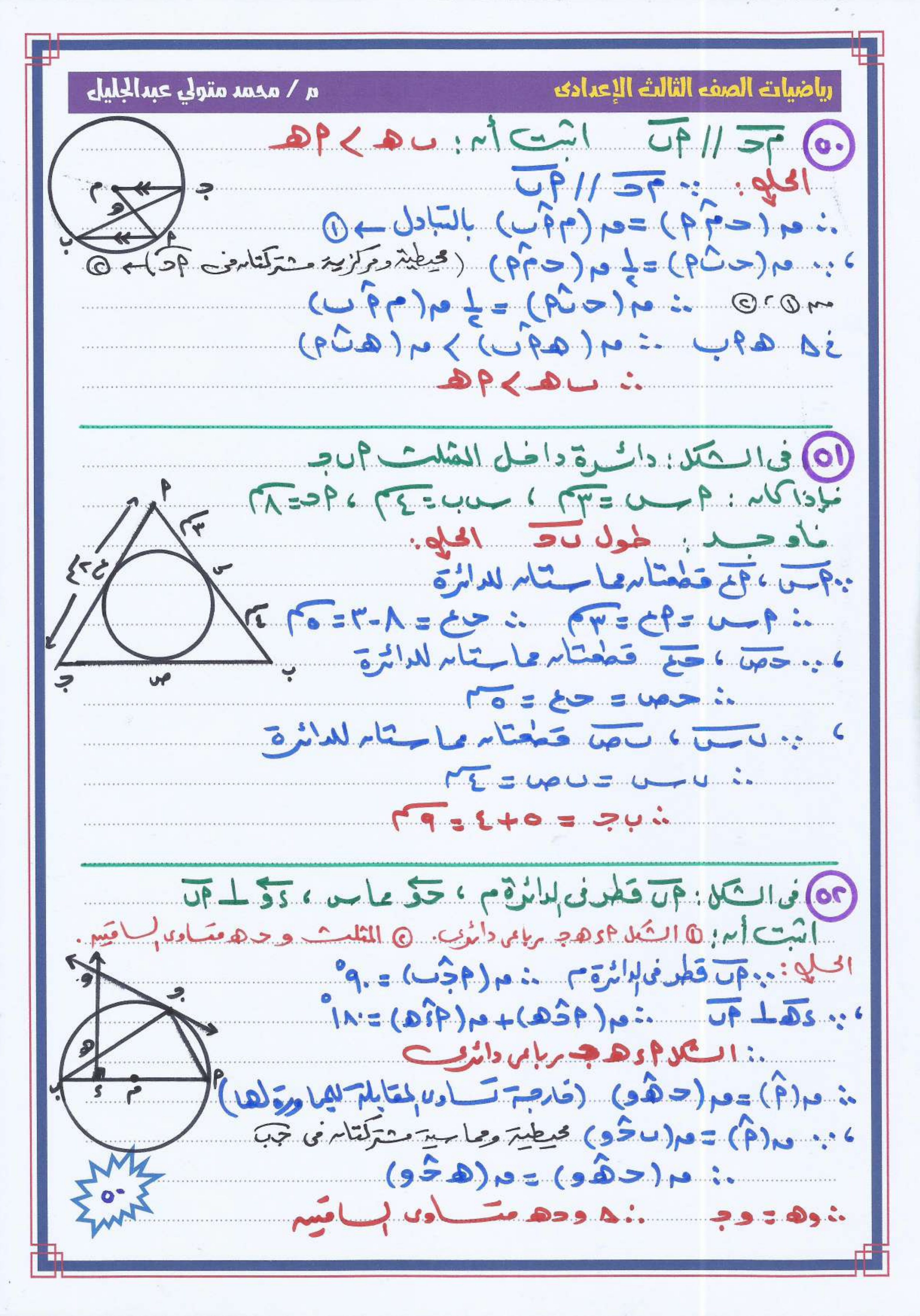
، ∵ ق(∠هـ جـ و) = ½ ق(∠هـ م جـ) مماسية ومركزية مشتركتان في $\overset{\frown}{هـ جـ}$ ← ③

في △ م هـ جـ ∵ م هـ = م جـ = نق ، $\overline{م د}$ ⊥ $\overline{هـ جـ}$ وينصفه

∴ $\overrightarrow{م د}$ ينصف ∠ هـ م جـ

∴ ق(∠هـ م د) = ق(∠د م جـ) ← ④

من ③ ، ④ ∴ ق(∠هـ جـ و) = ق(∠د م جـ)



**(٥٠)** م ج // أ ب   أثبت أن: ب هـ > أ هـ

**الحل:** ∵ م ج // أ ب

∴ ق(∠ج م أ) = ق(∠م أ ب) بالتبادل ← ①

، ∵ ق(∠ج ب أ) = ½ ق(∠ج م أ) (محيطية ومركزية مشتركتان في أ ج) ← ②

من ①، ② ∴ ق(∠ج ب أ) = ½ ق(∠م أ ب)

في △ هـ أ ب ∴ ق(∠هـ أ ب) > ق(∠هـ ب أ)

∴ ب هـ > أ هـ

---

**(٥١)** في الشكل: دائرة داخل المثلث أ ب ج

فإذا كان: أ س = ٣ سم، س ب = ٤ سم، أ ج = ٨ سم

فأوجد: طول ب ج

**الحل:**

∵ أ س، أ ع قطعتان مماستان للدائرة

∴ أ س = أ ع = ٣ سم ∴ ج ع = ٨ − ٣ = ٥ سم

، ∵ ج ص، ج ع قطعتان مماستان للدائرة

∴ ج ص = ج ع = ٥ سم

، ∵ ب س، ب ص قطعتان مماستان للدائرة

∴ ب س = ب ص = ٤ سم

∴ ب ج = ٥ + ٤ = ٩ سم

---

**(٥٢)** في الشكل: أ ب قطر في الدائرة م، ج و مماس، د و ⊥ أ ب

أثبت أن: ① الشكل أ د هـ ج رباعي دائري. ② المثلث و ج هـ متساوي الساقين.

**الحل:** ∵ أ ب قطر في الدائرة م ∴ ق(∠أ ج ب) = ٩٠°

، ∵ د هـ ⊥ أ ب ∴ ق(∠أ د هـ) + ق(∠أ ج هـ) = ١٨٠°

∴ الشكل أ د هـ ج رباعي دائري

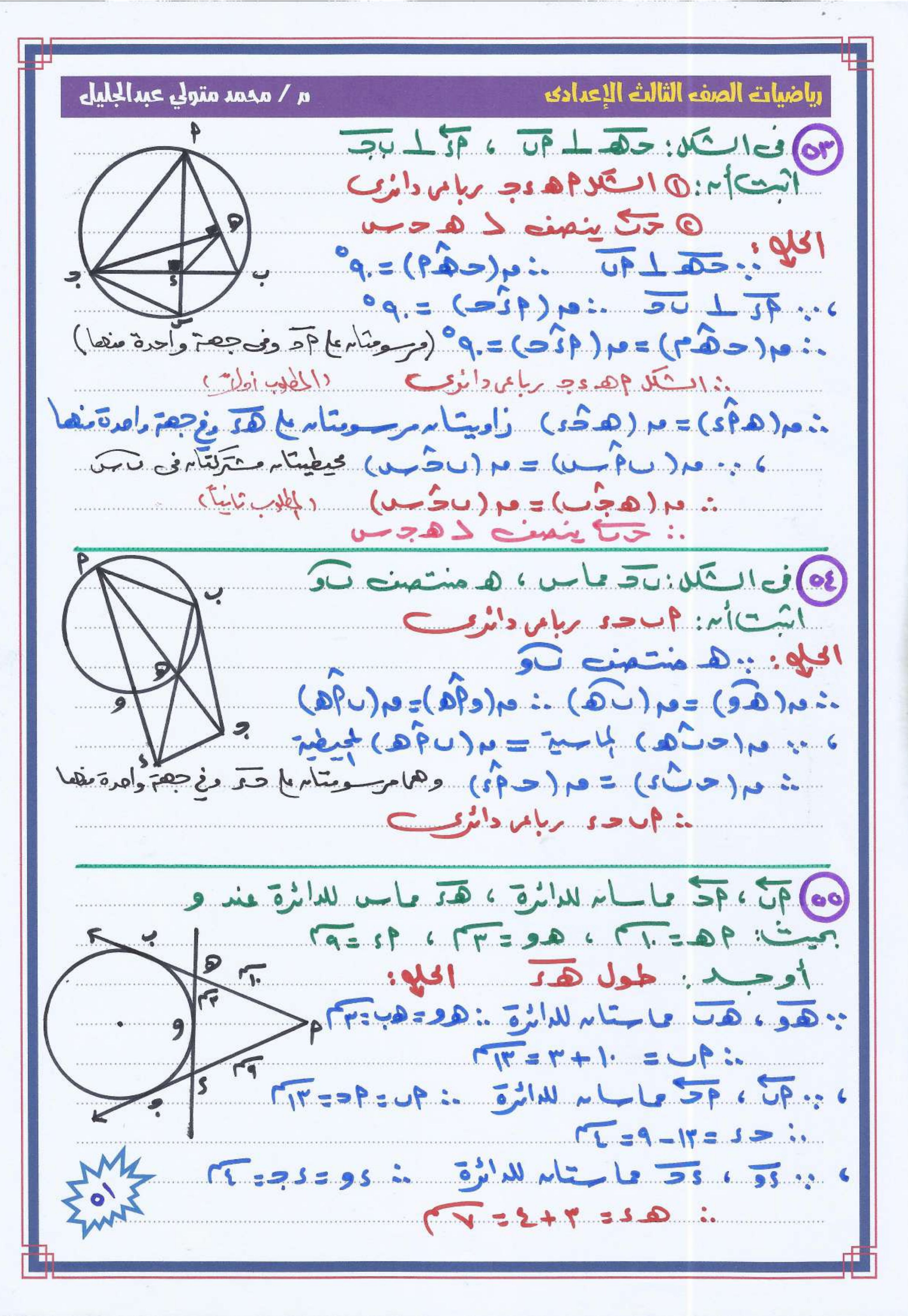
∴ ق(∠أ) = ق(∠ج هـ و) (خارجة تساوي المقابلة للمجاورة لها)

، ∵ ق(∠أ) = ق(∠ب ج و) محيطية ومماسية مشتركتان في ج ب

∴ ق(∠ج هـ و) = ق(∠هـ ج و)

∴ و هـ = و ج ∴ △ و ج هـ متساوي الساقين

٥٠





**(٥٣)** في الشكل: جـهـ ⊥ أب ، أء ⊥ بجـ

اثبت أن: ① الشكل أهـ ء جـ رباعي دائري

② جـب ينصف ∠ هـ جـ س

**الحل:** ∵ جـهـ ⊥ أب ∴ ق(∠جـ هـ أ) = ٩٠°

، ∵ أء ⊥ بجـ ∴ ق(∠أ ء جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠جـ هـ أ) = ق(∠أ ء جـ) = ٩٠° (مرسومتان على أجـ وفي جهة واحدة منها)

∴ الشكل أهـ ء جـ رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠هـ أ ء) = ق(∠هـ جـ ء) زاويتان مرسومتان على هـء وفي جهة واحدة منها

، ∵ ق(∠ب أ س) = ق(∠ب جـ س) محيطيتان مشتركتان في ⌒ب س

∴ ق(∠هـ جـ ب) = ق(∠ب جـ س) (المطلوب ثانياً)

∴ جـب ينصف ∠ هـ جـ س

**(٥٤)** في الشكل: بجـ مماس ، هـ منتصف ⌒ب و

اثبت أن: أ ب جـ ء رباعي دائري

**الحل:** ∵ هـ منتصف ⌒ب و

∴ ق(⌒هـ و) = ق(⌒ب هـ) ∴ ق(∠و أ هـ) = ق(∠ب أ هـ)

، ∵ ق(∠جـ ب هـ) المماسية = ق(∠ب أ هـ) المحيطية

∴ ق(∠جـ ب ء) = ق(∠جـ أ ء) وهما مرسومتان على جـء وفي جهة واحدة منها

∴ أ ب جـ ء رباعي دائري

**(٥٥)** أب ، أجـ مماسان للدائرة ، هـء مماس للدائرة عند و

بحيث: أهـ = ١٠ سم ، هـو = ٣ سم ، أء = ٩ سم

أوجد: طول هـء

**الحل:**

∵ هـو ، هـب مماستان للدائرة ∴ هـو = هـب = ٣ سم

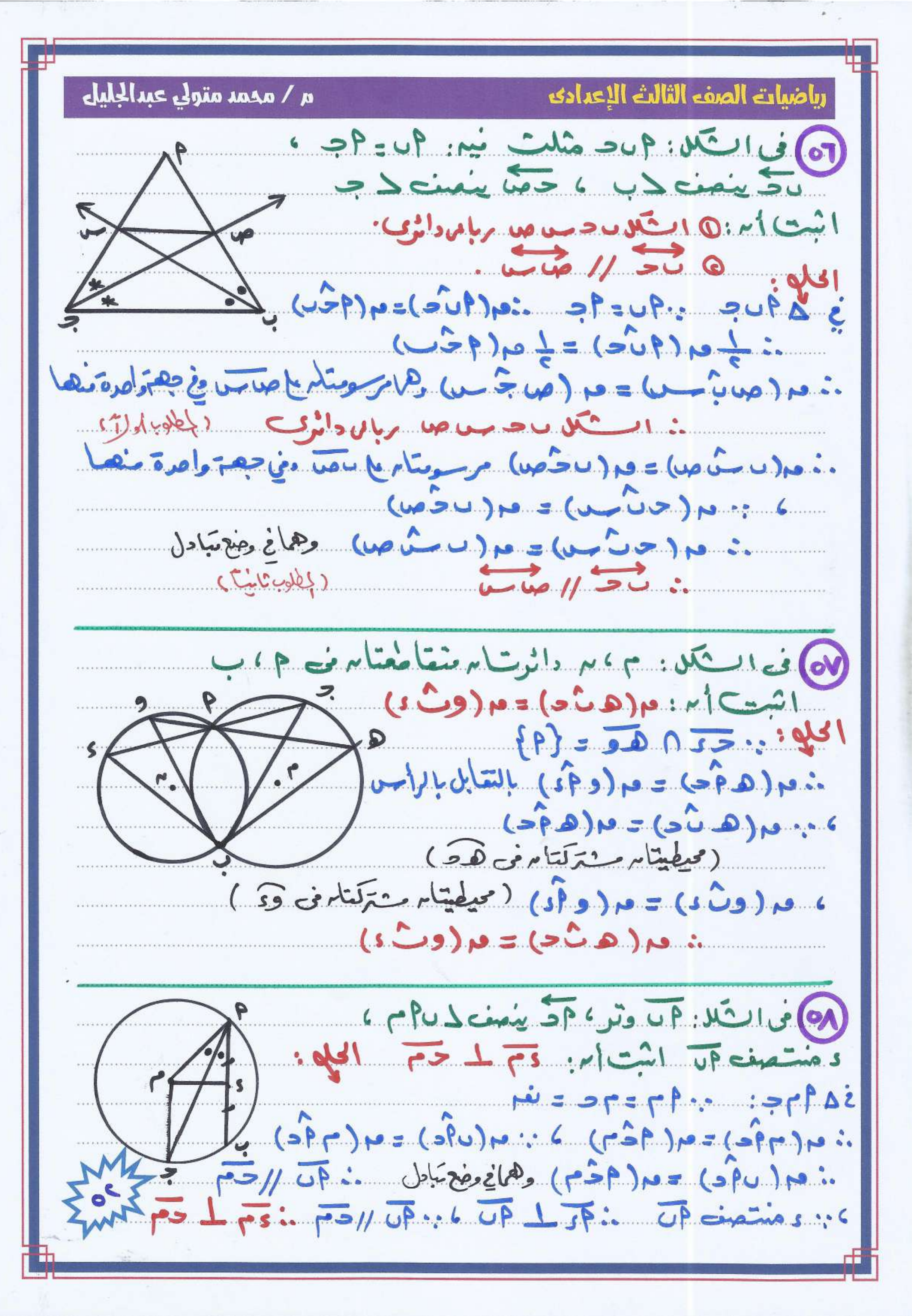
∴ أب = ١٠ + ٣ = ١٣ سم

، ∵ أب ، أجـ مماستان للدائرة ∴ أب = أجـ = ١٣ سم

∴ جـء = ١٣ − ٩ = ٤ سم

، ∵ ءو ، ءجـ مماستان للدائرة ∴ ءو = ءجـ = ٤ سم

∴ هـء = ٣ + ٤ = ٧ سم



**(٥٦)** في الشكل: أ ب جـ مثلث فيه: أ ب = أ جـ ، ب س ينصف ∠ ب ، جـ ص ينصف ∠ جـ

اثبت أن: ① الشكل ب جـ س ص رباعي دائري.
② ب جـ // ص س .

**الحل:**

في Δ أ ب جـ : ∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب)

∴ ½ ق(∠ أ ب جـ) = ½ ق(∠ أ جـ ب)

∴ ق(∠ ص ب س) = ق(∠ ص جـ س) وهما مرسومتان على ص س وفي جهة واحدة منها

∴ الشكل ب جـ س ص رباعي دائري (المطلوب أولاً)

∴ ق(∠ ب س ص) = ق(∠ ب جـ ص) مرسومتان على ب ص وفي جهة واحدة منها

، ∵ ق(∠ جـ ب س) = ق(∠ ب جـ ص)

∴ ق(∠ جـ ب س) = ق(∠ ب س ص) وهما في وضع تبادل

∴ ب جـ // ص س (المطلوب ثانياً)

---

**(٥٧)** في الشكل: م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

اثبت أن: ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ و ب د)

**الحل:** ∵ جـ د ∩ هـ و = {أ}

∴ ق(∠ هـ أ جـ) = ق(∠ و أ د) بالتقابل بالرأس

، ∵ ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ هـ أ جـ) (محيطيتان مشتركتان في هـ جـ)

، ق(∠ و ب د) = ق(∠ و أ د) (محيطيتان مشتركتان في و د)

∴ ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ و ب د)

---

**(٥٨)** في الشكل: أ ب وتر ، أ جـ ينصف ∠ ب أ م ، د منتصف أ ب اثبت أن: د م ⊥ جـ م

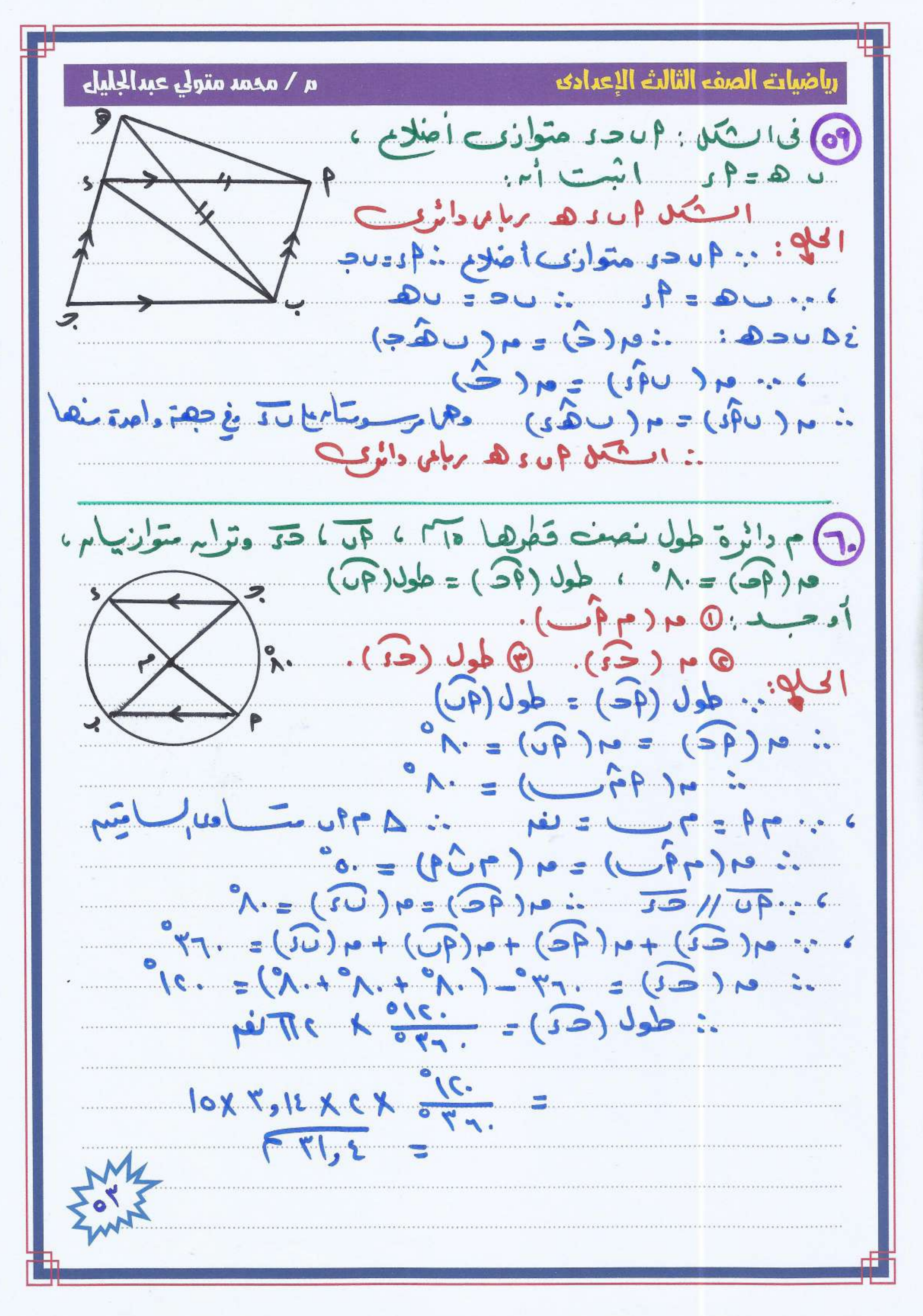
**الحل:**

في Δ أ م جـ : ∵ م أ = م جـ = نق

∴ ق(∠ م أ جـ) = ق(∠ أ جـ م) ، ∵ ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ م أ جـ)

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ أ جـ م) وهما في وضع تبادل ∴ أ ب // جـ م

، ∵ د منتصف أ ب ∴ م د ⊥ أ ب ، ∵ أ ب // جـ م ∴ د م ⊥ جـ م



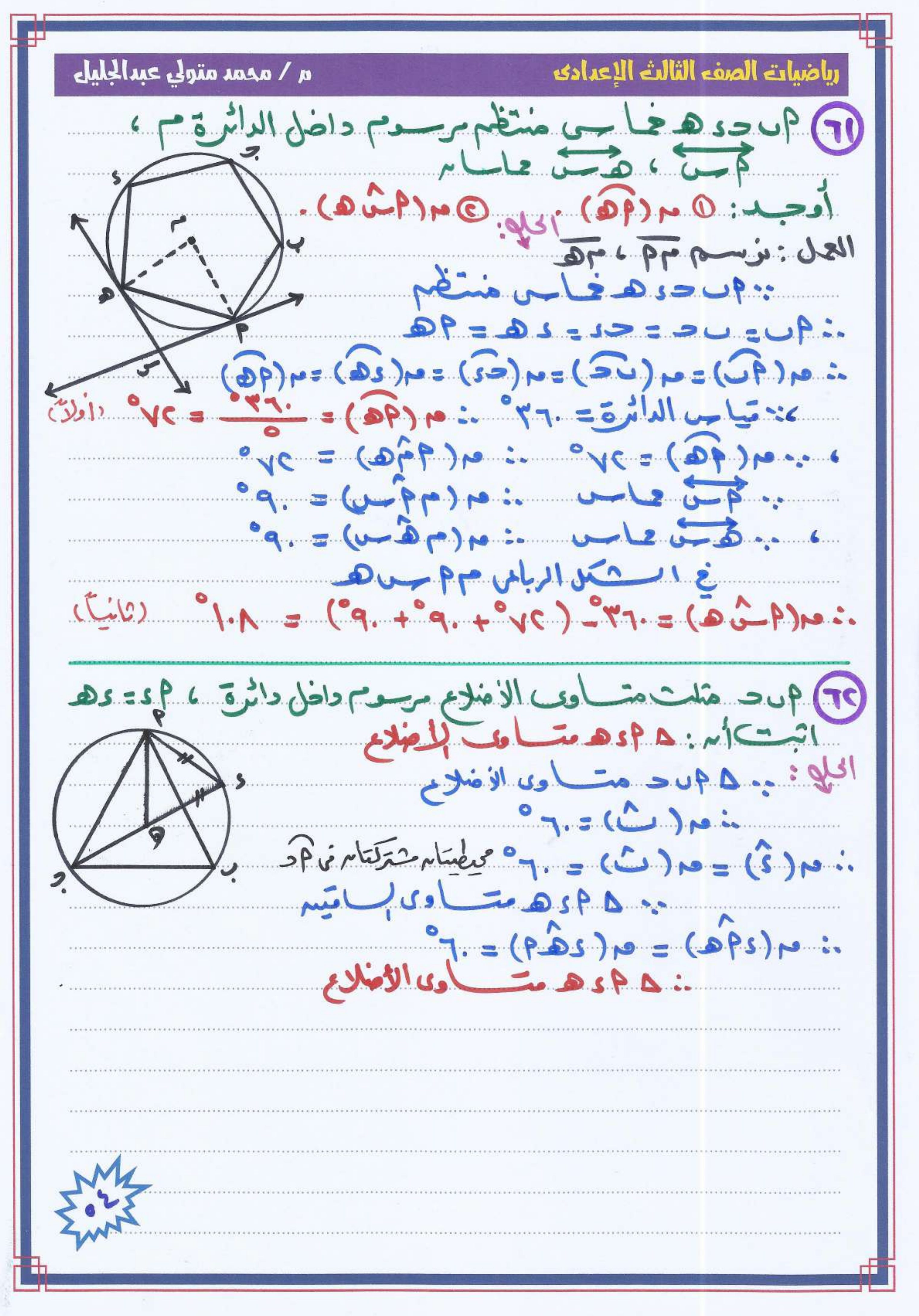
**(٥٩)** في الشكل: أ ب جـ د متوازي أضلاع، ب هـ = أ د اثبت أن:
الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

**الحل:** ∵ أ ب جـ د متوازي أضلاع ∴ أ د = ب جـ
، ∵ ب هـ = أ د ∴ ب جـ = ب هـ
في △ ب جـ هـ: ∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب هـ جـ)
، ∵ ق(∠ب أ د) = ق(∠جـ)
∴ ق(∠ب أ د) = ق(∠ب هـ د) وهما مرسومتان على ب د في جهة واحدة منها
∴ الشكل أ ب د هـ رباعي دائري

---

**(٦٠)** م دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم، $\overline{أب}$، $\overline{جـ د}$ وتران متوازيان،
ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ٨٠°، طول($\overset{\frown}{أجـ}$) = طول($\overset{\frown}{أب}$)
أوجد: ① ق(∠م أ ب). ② ق($\overset{\frown}{جـ د}$). ③ طول($\overset{\frown}{جـ د}$).

**الحل:** ∵ طول($\overset{\frown}{أجـ}$) = طول($\overset{\frown}{أب}$)
∴ ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٨٠°
∴ ق(∠أ م ب) = ٨٠°
، ∵ م أ = م ب = نق ∴ △ م أ ب متساوي الساقين
∴ ق(∠م أ ب) = ق(∠م ب أ) = ٥٠°
، ∵ $\overline{أب}$ // $\overline{جـ د}$ ∴ ق($\overset{\frown}{أجـ}$) = ق($\overset{\frown}{ب د}$) = ٨٠°
، ∵ ق($\overset{\frown}{جـ د}$) + ق($\overset{\frown}{أجـ}$) + ق($\overset{\frown}{أب}$) + ق($\overset{\frown}{ب د}$) = ٣٦٠°
∴ ق($\overset{\frown}{جـ د}$) = ٣٦٠° − (٨٠° + ٨٠° + ٨٠°) = ١٢٠°
∴ طول($\overset{\frown}{جـ د}$) = $\frac{١٢٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ π نق
= $\frac{١٢٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × ٣,١٤ × ١٥
= ٣١,٤ سم



(٦١) أ ب جـ د هـ خماسي منتظم مرسوم داخل الدائرة م ، أس⟷ ، هـس⟷ مماسان

أوجد: ① م(أهـ⌒) ② م(∠أ س هـ).

الحل:

العمل: نرسم مأ‾ ، مهـ‾

∵ أ ب جـ د هـ خماسي منتظم

∴ أب = ب جـ = جـ د = د هـ = أهـ

∴ م(أب⌒) = م(ب جـ⌒) = م(جـ د⌒) = م(د هـ⌒) = م(أهـ⌒)

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ م(أهـ⌒) = ٣٦٠° ÷ ٥ = ٧٢° (أولاً)

، ∵ م(أهـ⌒) = ٧٢° ∴ م(∠أ م هـ) = ٧٢°

∵ أس⟷ مماس ∴ م(∠م أ س) = ٩٠°

، ∵ هـس⟷ مماس ∴ م(∠م هـ س) = ٩٠°

في الشكل الرباعي م أ س هـ

∴ م(∠أ س هـ) = ٣٦٠° − (٧٢° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٠٨° (ثانياً)

---

(٦٢) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع مرسوم داخل دائرة ، أ د = د هـ

اثبت أن: △ أ د هـ متساوي الأضلاع

الحل: ∵ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع

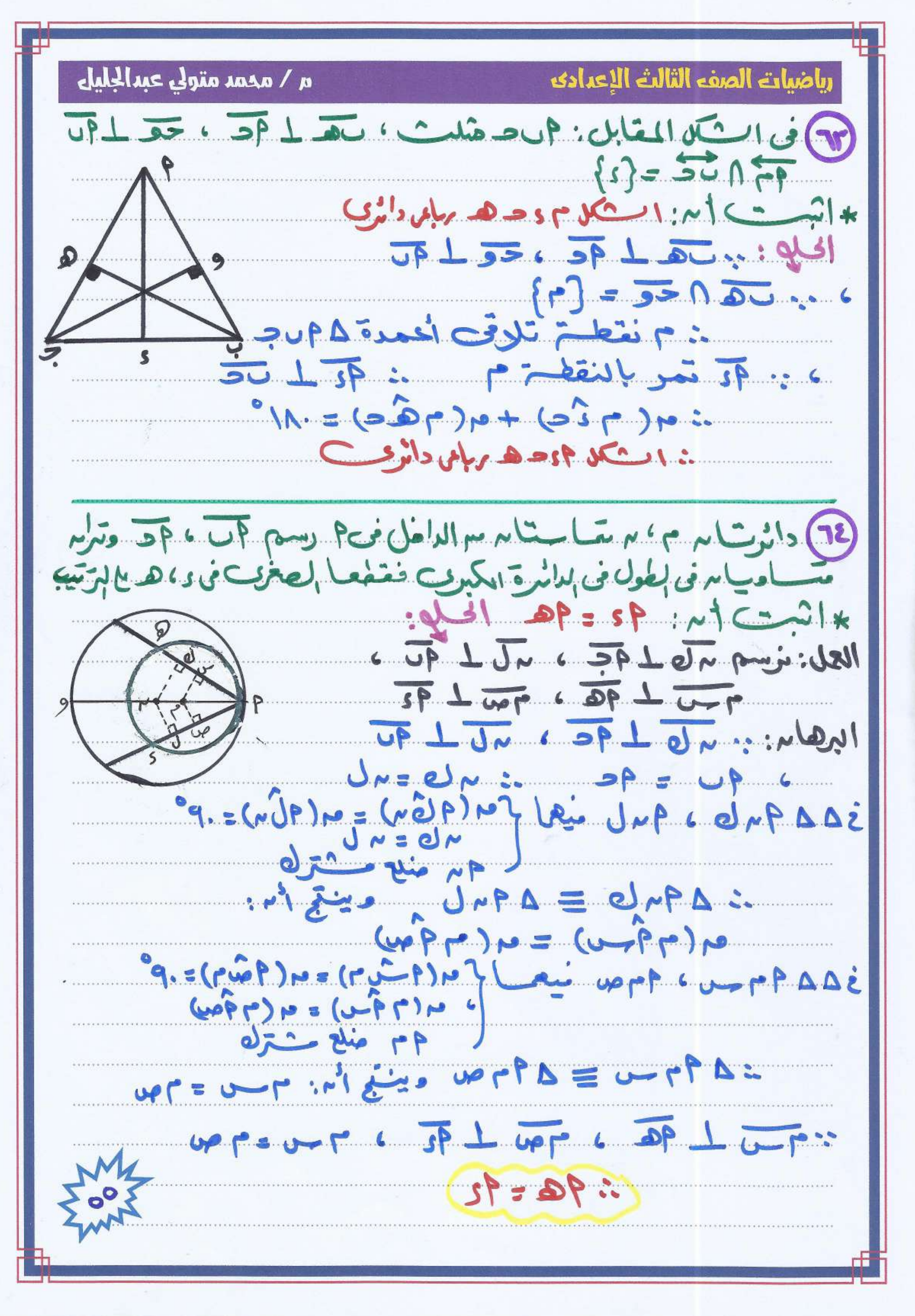
∴ م(∠ب) = ٦٠°

∴ م(∠د) = م(∠ب) = ٦٠° محيطيتان مشتركتان في أجـ⌒

∵ △ أ د هـ متساوي الساقين

∴ م(∠د أ هـ) = م(∠د هـ أ) = ٦٠°

∴ △ أ د هـ متساوي الأضلاع



(٦٣) في الشكل المقابل: أ ب جـ مثلث، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}} \perp \overline{\text{أ ب}}$
$\overleftrightarrow{\text{أ م}} \cap \overleftrightarrow{\text{ب جـ}} = \{\text{د}\}$

* أثبت أن: الشكل م د جـ هـ رباعي دائري

الحل: ∵ $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ و}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

، ∵ $\overline{\text{ب هـ}} \cap \overline{\text{جـ و}} = \{\text{م}\}$

∴ م نقطة تلاقي أعمدة Δ أ ب جـ

، ∵ $\overline{\text{أ د}}$ تمر بالنقطة م ∴ $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق(∠م د جـ) + ق(∠م هـ جـ) = ١٨٠°

∴ الشكل م د جـ هـ رباعي دائري

---

(٦٤) دائرتان م، ن متماستان من الداخل في أ رسم $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة الكبرى فقطعا الصغرى في د، هـ على الترتيب

* أثبت أن: أ د = أ هـ

الحل:

العمل: نرسم $\overline{\text{ن ك}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ن ل}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ،
$\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{أ د}}$

البرهان: ∵ $\overline{\text{ن ك}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ن ل}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

، أ ب = أ جـ ∴ ن ك = ن ل

في ΔΔ أ ن ك ، أ ن ل فيهما:
- ق(∠أ ك ن) = ق(∠أ ل ن) = ٩٠°
- ن ك = ن ل
- أ ن ضلع مشترك

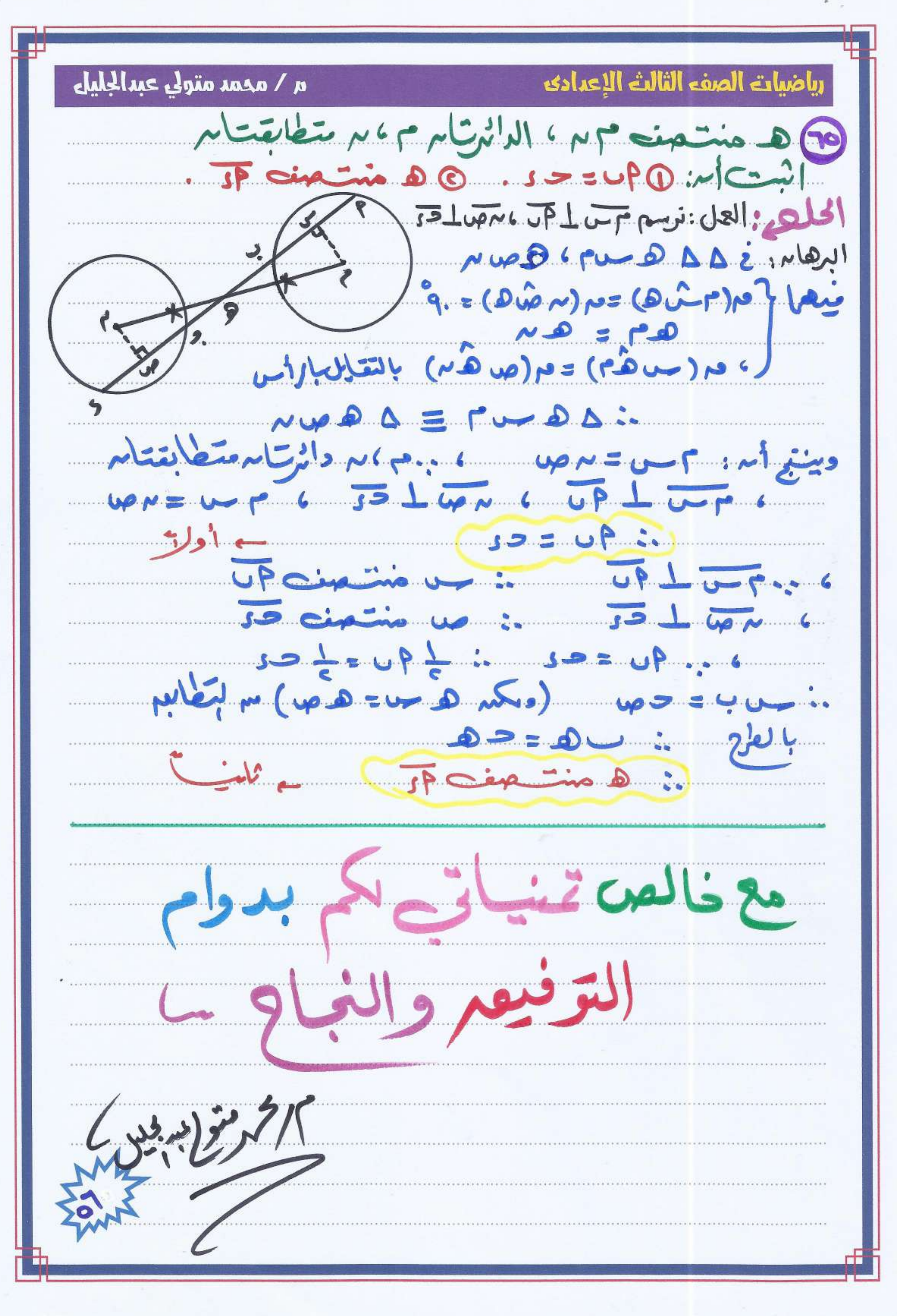
∴ Δ أ ن ك ≡ Δ أ ن ل وينتج أن:
ق(∠م أ س) = ق(∠م أ ص)

في ΔΔ أ م س ، أ م ص فيهما:
- ق(∠أ س م) = ق(∠أ ص م) = ٩٠°
- ، ق(∠م أ س) = ق(∠م أ ص)
- أ م ضلع مشترك

∴ Δ أ م س ≡ Δ أ م ص وينتج أن: م س = م ص

∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ هـ}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{أ د}}$ ، م س = م ص

∴ أ هـ = أ د



**(٦٥)** ه منتصف $\overline{م ن}$ ، الدائرتان م ، ن متطابقتان

اثبت أن: ① أ ب = جـ د . ② ه منتصف $\overline{أ د}$ .

**الحل:** العمل: نرسم $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{ن ص} \perp \overline{جـ د}$

البرهان: في $\Delta\Delta$ ه س م ، ه ص ن

فيهما:
- ق(∠م س ه) = ق(∠ن ص ه) = $90^\circ$
- ه م = ه ن
- ، ق(∠س ه م) = ق(∠ص ه ن) بالتقابل بالرأس

∴ $\Delta$ ه س م $\equiv$ $\Delta$ ه ص ن

وينتج أن: م س = ن ص ، ∵ م ، ن دائرتان متطابقتان

، $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{ن ص} \perp \overline{جـ د}$ ، م س = ن ص

∴ أ ب = جـ د ← أولاً

، ∵ $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ∴ س منتصف $\overline{أ ب}$

، $\overline{ن ص} \perp \overline{جـ د}$ ∴ ص منتصف $\overline{جـ د}$

، ∵ أ ب = جـ د ∴ $\frac{1}{2}$ أ ب = $\frac{1}{2}$ جـ د

∴ س ب = جـ ص (ولكن ه س = ه ص) من التطابق

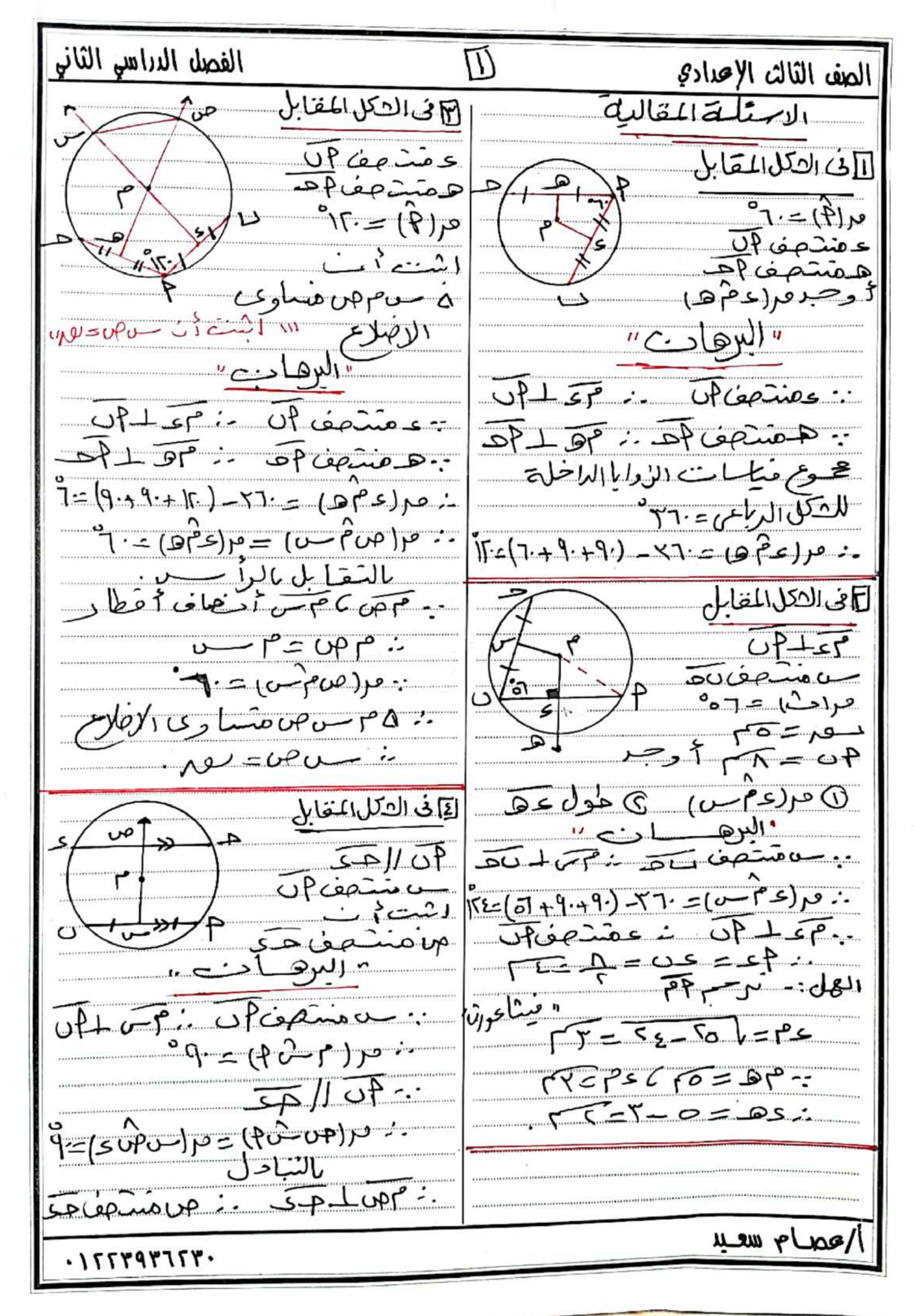
بالطرح ∴ ب ه = جـ ه

∴ ه منتصف $\overline{أ د}$ ← ثانياً

---

مع خالص تمنياتي لكم بدوام التوفيق والنجاح

م/ محمد متولي عبدالجليل



## الأسئلة المقالية

**[1] في الشكل المقابل**

ق(∠أ) = 60°
ء منتصف أب
هـ منتصف أجـ
أوجد ق(∠ء م هـ)

**"البرهان"**

∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب
∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ
مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعي = 360°
∴ ق(∠ء م هـ) = 360 − (90 + 90 + 60) = 120°

**[2] في الشكل المقابل**

م ء ⊥ أب
س منتصف ب جـ
ق(∠ب) = 56°
س هـ = 5 سم
أب = 8 سم أوجد
(1) ق(∠ء م س) (2) طول ء هـ

**"البرهان"**

∵ س منتصف ب جـ ∴ م س ⊥ ب جـ
∴ ق(∠ء م س) = 360 − (90 + 90 + 56) = 124°
∵ م ء ⊥ أب ∴ ء منتصف أب
∴ أء = ء ب = أب ÷ 2 = 4 سم
العمل: نرسم م أ
"فيثاغورث"
ء م = $\sqrt{25 - 16}$ = 3 سم
∵ م هـ = 5 سم ، ء م = 3 سم
∴ ء هـ = 5 − 3 = 2 سم.

**[3] في الشكل المقابل**

ء منتصف أب
هـ منتصف أجـ
ق(∠أ) = 120°
اثبت أن
△ س م ص متساوي الأضلاع
"اثبت أن س ص = ص هـ"

**"البرهان"**

∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب
∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ
∴ ق(∠ء م هـ) = 360 − (120 + 90 + 90) = 60°
∴ ق(∠ص م س) = ق(∠ء م هـ) = 60° بالتقابل بالرأس.
∵ م ص ، م س أنصاف أقطار
∴ م ص = م س
∴ ق(∠ص م س) = 60°
∴ △ م س ص متساوي الأضلاع
∴ س ص = ص هـ.

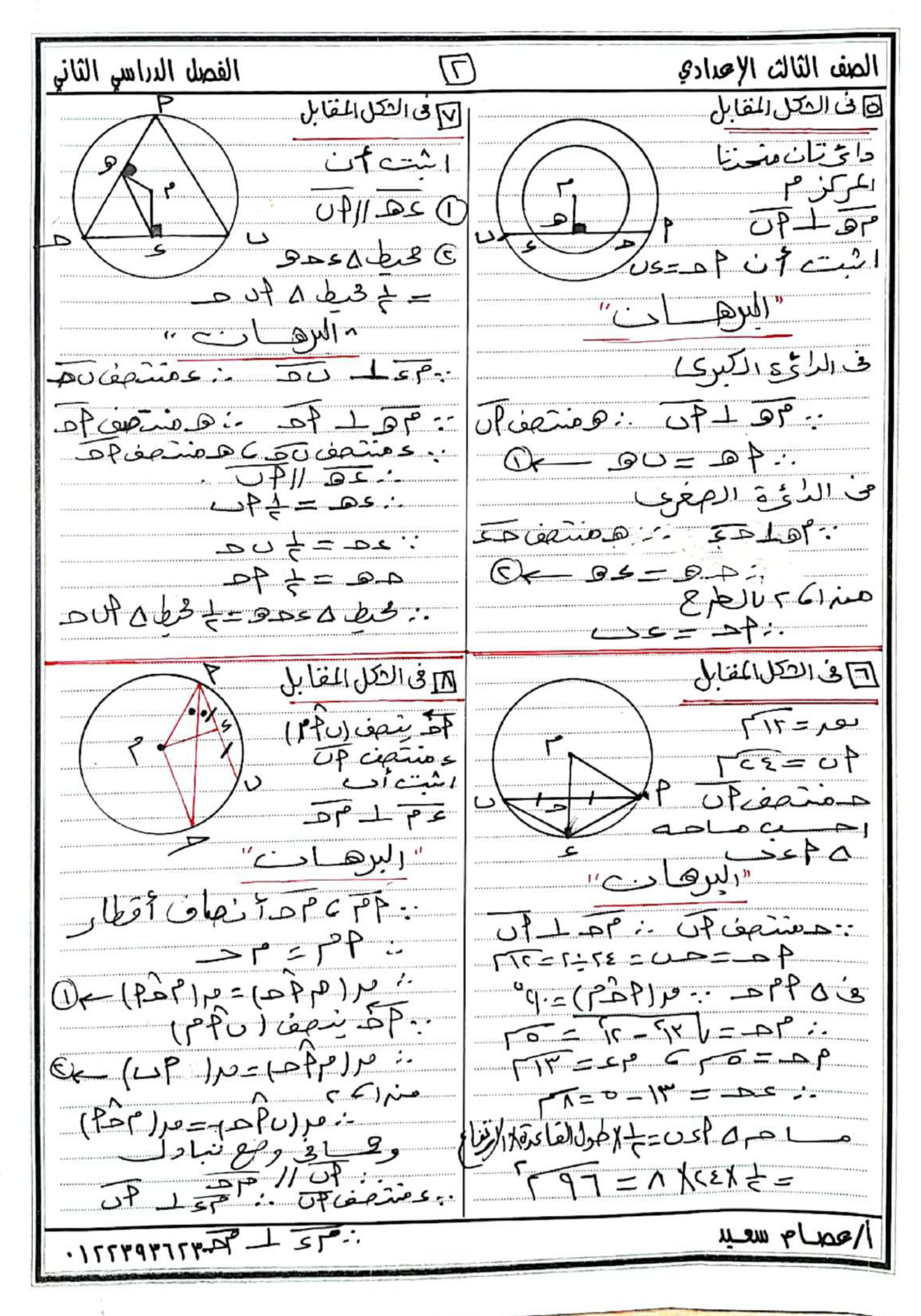
**[4] في الشكل المقابل**

أب // جـ ء
س منتصف أب
اثبت أن
ص منتصف جـ ء

**"البرهان"**

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب
∴ ق(∠م س أ) = 90°
∵ أب // جـ ء
∴ ق(∠ص س أ) = ق(∠س ص ء) = 90° بالتبادل
∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ ص منتصف جـ ء

أ/ عصام سعيد
01223936230





⑤ في الشكل المقابل

دائرتان متحدتا المركز م

مه ⊥ أب

اثبت أن أجـ = دب

"البرهان"

في الدائرة الكبرى

∵ مه ⊥ أب ∴ ه منتصف أب

∴ أه = به ← ①

في الدائرة الصغرى

∵ مه ⊥ جـد ∴ ه منتصف جـد

∴ جـه = ده ← ②

من ١، ٢ بالطرح

∴ أجـ = دب

⑦ في الشكل المقابل

اثبت أن

① ده // أب

② محيط △ دجـه = ½ محيط △ أبجـ

"البرهان"

∵ مد ⊥ بجـ ∴ د منتصف بجـ

∵ مه ⊥ أجـ ∴ ه منتصف أجـ

∵ د منتصف بجـ، ه منتصف أجـ

∴ ده // أب

∴ ده = ½ أب

∵ دجـ = ½ بجـ

جـه = ½ أجـ

∴ محيط △ دجـه = ½ محيط △ أبجـ

⑥ في الشكل المقابل

نق = ١٣ سم

أب = ٢٤ سم

جـ منتصف أب

احسب مساحة △ أدب

"البرهان"

∵ جـ منتصف أب ∴ مجـ ⊥ أب

أجـ = جـب = ٢٤ ÷ ٢ = ١٢ سم

في △ أمجـ ∵ ق(∠أجـم) = ٩٠°

∴ مجـ = $\sqrt{١٣^٢ - ١٢^٢}$ = ٥ سم

مجـ = ٥ سم، مد = ١٣ سم

∴ دجـ = ١٣ − ٥ = ٨ سم

مساحة △ أدب = ½ × طول القاعدة × الارتفاع

= ½ × ٢٤ × ٨ = ٩٦ سم²

⑧ في الشكل المقابل

أجـ ينصف (∠بأم)

د منتصف أب

اثبت أن

دم ⊥ مجـ

"البرهان"

∵ مأ، مجـ أنصاف أقطار

∴ مأ = مجـ

∴ ق(∠مأجـ) = ق(∠أجـم) ← ①

∵ أجـ ينصف (∠بأم)

∴ ق(∠مأجـ) = ق(∠جـأب) ← ②

من ١، ٢

∴ ق(∠بأجـ) = ق(∠مجـأ)

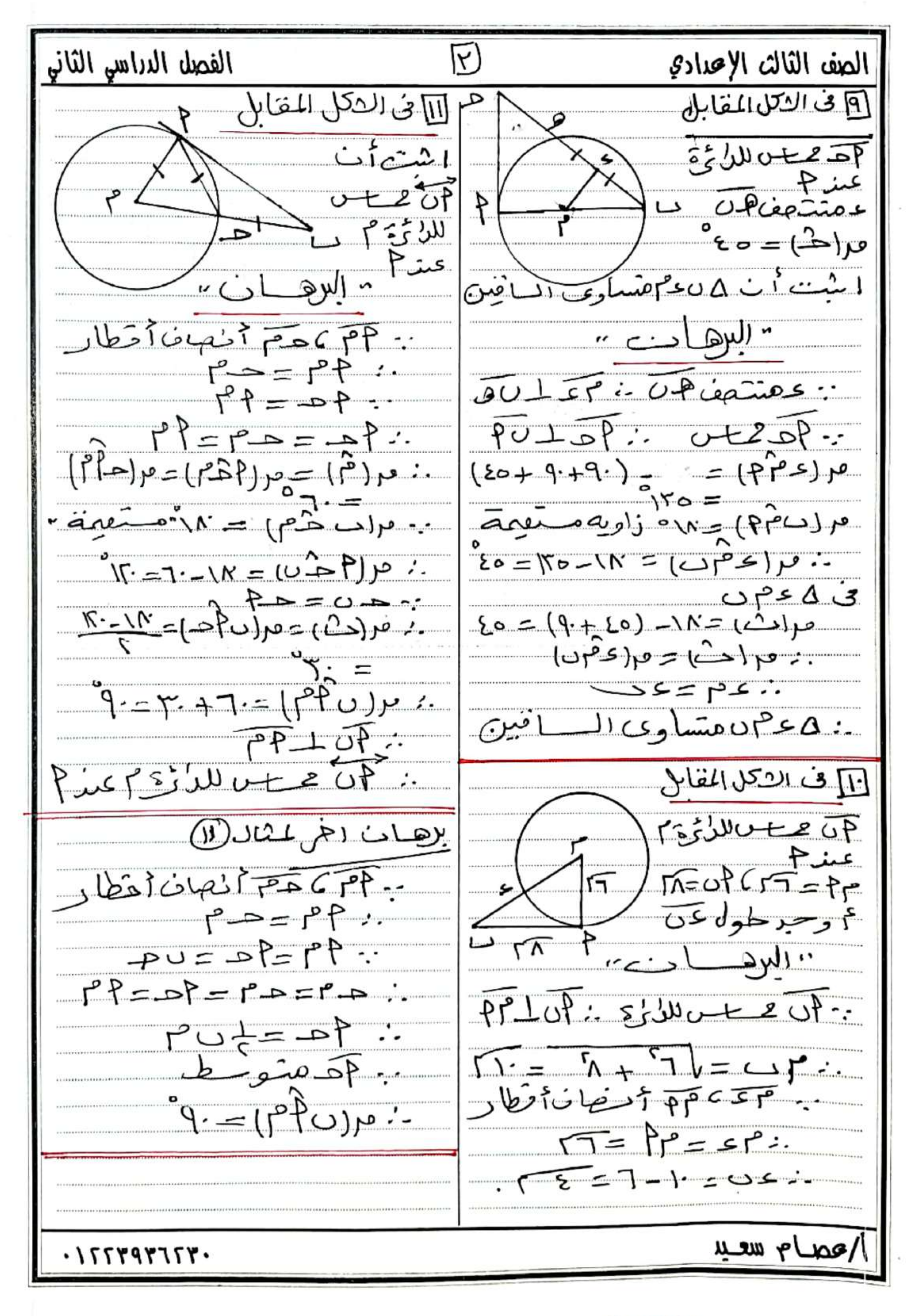
وهما في وضع تبادل

∴ مجـ // أب

∵ د منتصف أب ∴ مد ⊥ أب

∴ مد ⊥ مجـ


أ/ عصام سعيد
٠١٢٢٢٩٣٦٢٣





**٩ في الشكل المقابل**

أجـ مماس للدائرة عند أ

ء منتصف هـ ب

ق(∠جـ) = ٤٥°

اثبت أن △ ب ء م متساوي الساقين

**" البرهان "**

∵ ء منتصف هـ ب ∴ م ء ⊥ ب هـ

∵ أجـ مماس ∴ أجـ ⊥ أ ب

ق(∠ء م أ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٤٥)

= ١٣٥°

ق(∠ب م أ) = ١٨٠° زاوية مستقيمة

∴ ق(∠ء م ب) = ١٨٠ − ١٣٥ = ٤٥°

في △ ء م ب

ق(∠ب) = ١٨٠ − (٤٥ + ٩٠) = ٤٥

∴ ق(∠ب) = ق(∠ء م ب)

∴ ء م = ء ب

∴ △ ء م ب متساوي الساقين

**١٠ في الشكل المقابل**

أب مماس للدائرة م عند أ

م أ = ٦سم، أب = ٨سم

أوجد طول ء ب

**" البرهان "**

∵ أب مماس للدائرة ∴ أب ⊥ م أ

∴ م ب = $\sqrt{٦^2 + ٨^2}$ = ١٠سم

∵ م ء، م أ أنصاف أقطار

∴ م ء = م أ = ٦سم

∴ ء ب = ١٠ − ٦ = ٤سم.

**١١ في الشكل المقابل**

اثبت أن أب مماس للدائرة م عند أ

**" البرهان "**

∵ م أ، م جـ أنصاف أقطار

∴ م أ = م جـ

∵ أجـ = أ م

∴ أجـ = جـ م = أ م

∴ ق(∠م) = ق(∠أجـ م) = ق(∠م أ جـ) = ٦٠°

∵ ق(∠ب جـ م) = ١٨٠° مستقيمة

∴ ق(∠أجـ ب) = ١٨٠ − ٦٠ = ١٢٠°

∵ جـ ب = جـ أ

∴ ق(∠ب) = ق(∠ب أ جـ) = $\frac{١٨٠ - ١٢٠}{٢}$

= ٣٠°

∴ ق(∠ب أ م) = ٦٠ + ٣٠ = ٩٠°

∴ أب ⊥ م أ

∴ أب مماس للدائرة م عند أ

**برهان آخر لمثال (١١)**

∵ م أ، م جـ أنصاف أقطار

∴ م أ = م جـ

∵ م أ = أجـ = ب جـ

∴ جـ م = م أ = أجـ = جـ ب

∴ أجـ = ½ ب م

∴ أجـ متوسط

∴ ق(∠ب أ م) = ٩٠°

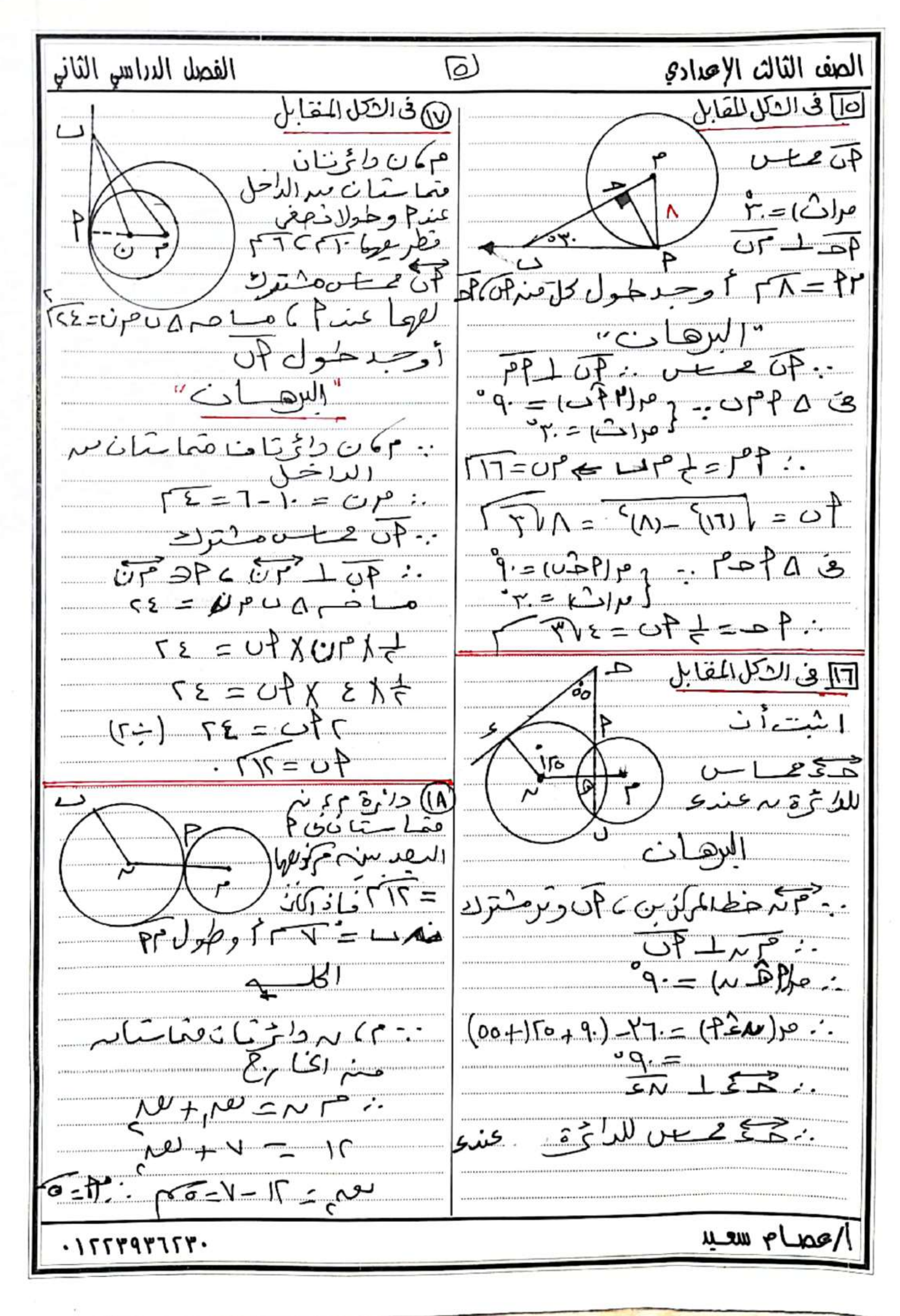
[١٢] فى الشكل المقابل
اثبت أن
$\overleftrightarrow{سص}$ مماس للدائرة م عند س
ص ١٢سم ، س ، م ، ٥سم ، ٨سم

البرهان
∵ م ع ، م س أنصاف أقطار
∴ م ع = م س = ٥ سم
∴ ص م = ٨ + ٥ = ١٣سم
فى ∆ س ص م
(ص م)$^2$ = (١٣)$^2$ = ١٦٩ | (س ص)$^2$ + (م س)$^2$ = (١٢)$^2$ + (٥)$^2$ = ١٦٩
∴ (ص م)$^2$ = (س ص)$^2$ + (م س)$^2$
∴ ق(∠م س ص) = ٩٠°
∴ $\overleftrightarrow{سص}$ مماس للدائرة م عند س

فى ∆ م أ حـ القائم فى حـ
م حـ = $\sqrt{٥^2 - ٤^2}$ = ٣سم
∴ طول نصف قطر الدائرة الصغرى = ٣سم

[١٣] فى الشكل المقابل
$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة الكبرى ويمس الدائرة الصغرى عند حـ
أب = ٨سم
طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٥سم
أوجد طول نصف قطر الدائرة الصغرى
"البرهان"
∵ $\overline{أب}$ مماس للدائرة الصغرى
∴ $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$
من الدائرة الكبرى
∵ $\overline{مجـ} \perp \overline{أب}$
∴ حـ منتصف $\overline{أب}$ ∴ أحـ = ٤سم

[١٤] فى الشكل المقابل
$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م
$\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{بء}$ مماسات
اثبت أن
حـ س = ص ء
"البرهان"
∵ $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس ∴ $\overline{أحـ} \perp \overline{أم}$
∵ $\overleftrightarrow{بء}$ مماس ∴ $\overline{بء} \perp \overline{بم}$
∆ أ حـ م ، ∆ ء ب م
فيهما { ق(∠أ) = ق(∠ب) = ٩٠° ، أم = ب م "أنصاف أقطار" ، ق(∠أ م حـ) = ق(∠ء م ب) بالتقابل بالرأس }
∴ ∆ أ حـ م ≡ ∆ ب ء م
وينتج حـ م = ء م
∵ م س = م ص = نق
بالطرح ∴ حـ س = ص ء





[١٥] في الشكل المقابل

$\overline{أب}$ مماس

ق(∠ب) = ٣٠°

$\overline{أجـ} \perp \overline{م ب}$

م أ = ٨ سم أوجد طول كل من $\overline{أب}$، $\overline{أجـ}$

"البرهان"

∵ $\overline{أب}$ مماس ∴ $\overline{أب} \perp \overline{م أ}$

في △ م أ ب ∵ ق(∠م أ ب) = ٩٠°، ق(∠ب) = ٣٠°

∴ م أ = ½ م ب ← م ب = ١٦ سم

أب = $\sqrt{(١٦)^2 - (٨)^2}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم

في △ أ جـ م ∵ ق(∠أ جـ ب) = ٩٠°، ق(∠ب) = ٣٠°

∴ أ جـ = ½ أب = ٤ $\sqrt{٣}$ سم

[١٦] في الشكل المقابل

أثبت أن $\overleftrightarrow{هـ د}$ مماس للدائرة ن عند د

البرهان

∵ م ن خط المركزين، $\overline{أب}$ وتر مشترك

∴ م ن ⊥ $\overline{أب}$

∴ ق(∠أ هـ ن) = ٩٠°

∴ ق(∠ن د هـ) = ٣٦٠ − (٩٠ + ١٢٥ + ٥٥)

= ٩٠°

∴ $\overleftrightarrow{هـ د} \perp \overline{ن د}$

∴ $\overleftrightarrow{هـ د}$ مماس للدائرة عند د

(١٧) في الشكل المقابل

م، ن دائرتان متماستان من الداخل عند أ وطولا نصفي قطريهما ١٠ سم، ٦ سم

$\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك لهما عند أ، مساحة △ ب م ن = ٢٤ سم²

أوجد طول $\overline{أب}$

"البرهان"

∵ م، ن دائرتان متماستان من الداخل

∴ م ن = ١٠ − ٦ = ٤ سم

∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك

∴ $\overleftrightarrow{أب} \perp \overleftrightarrow{م ن}$، أ ∈ $\overleftrightarrow{م ن}$

مساحة △ ب م ن = ٢٤

½ × م ن × أب = ٢٤

½ × ٤ × أب = ٢٤

٢ أب = ٢٤ (÷٢)

أب = ١٢ سم

(١٨) دائرة م، ن متماستان في أ البعد بين مركزيهما = ١٢ سم فإذا كان نق = ٧ سم وطول م أ

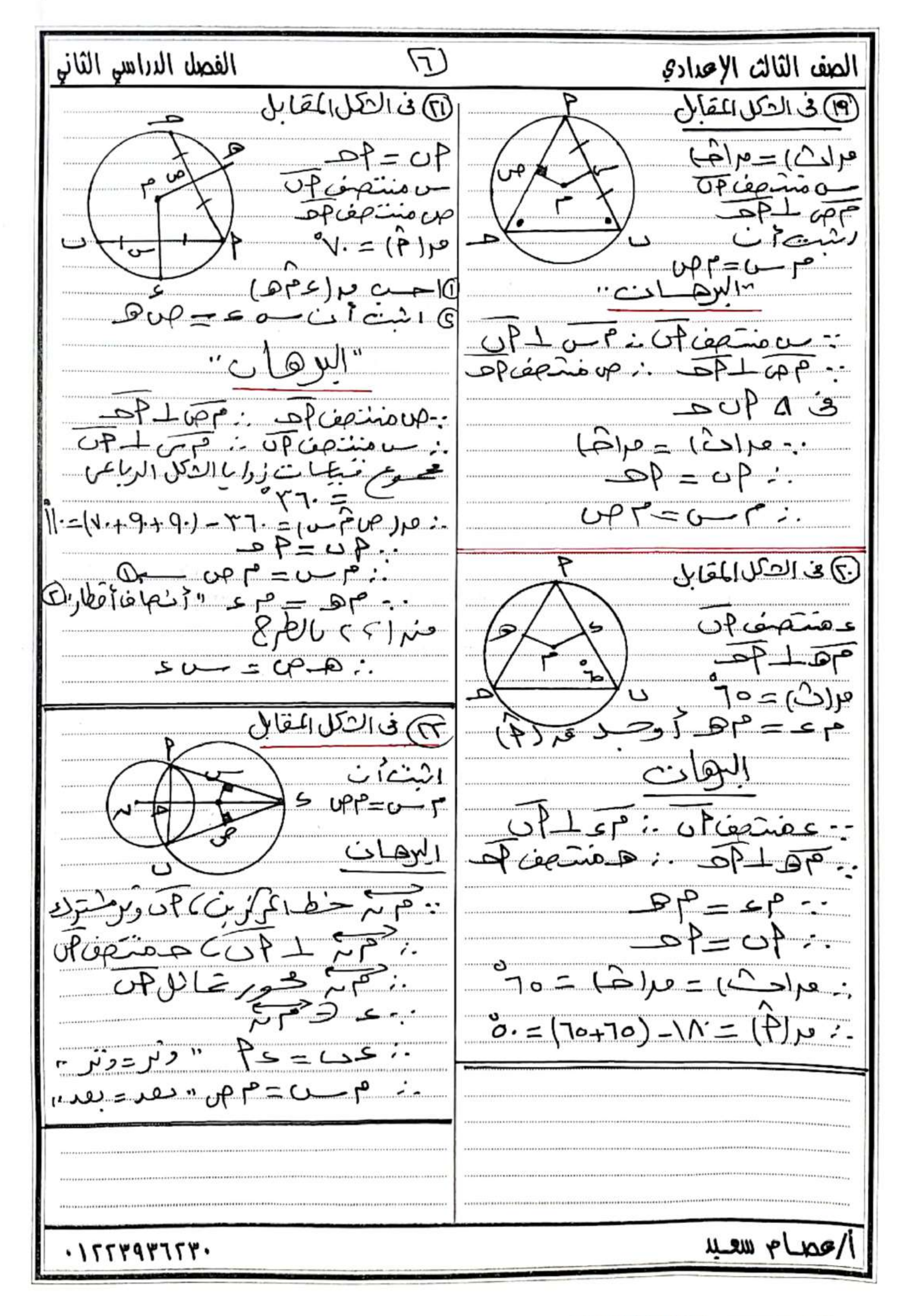
الحل

∵ م، ن دائرتان متماستان من الخارج

∴ م ن = نق₁ + نق₂

١٢ = ٧ + نق₂

نق₂ = ١٢ − ٧ = ٥ سم ∴ م أ = ٥





(١٩) في الشكل المقابل

ق(∠ب) = ق(∠جـ)
س منتصف أب
م ص ⊥ أجـ
اثبت أن
م س = م ص

البرهان:

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب
∵ م ص ⊥ أجـ ∴ ص منتصف أجـ
في △ أب جـ
∵ ق(∠ب) = ق(∠جـ)
∴ أب = أجـ
∴ م س = م ص

(٢٠) في الشكل المقابل

ء منتصف أب
م هـ ⊥ أجـ
ق(∠ب) = ٦٥°
م ء = م هـ أوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب
∵ م هـ ⊥ أجـ ∴ هـ منتصف أجـ
∵ م ء = م هـ
∴ أب = أجـ
∴ ق(∠ب) = ق(∠جـ) = ٦٥°
∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

(٢١) في الشكل المقابل

أب = أجـ
س منتصف أب
ص منتصف أجـ
ق(∠أ) = ٧٠°
(١) احسب ق(∠ء م هـ)
(٢) اثبت أن س ء = ص هـ

"البرهان"

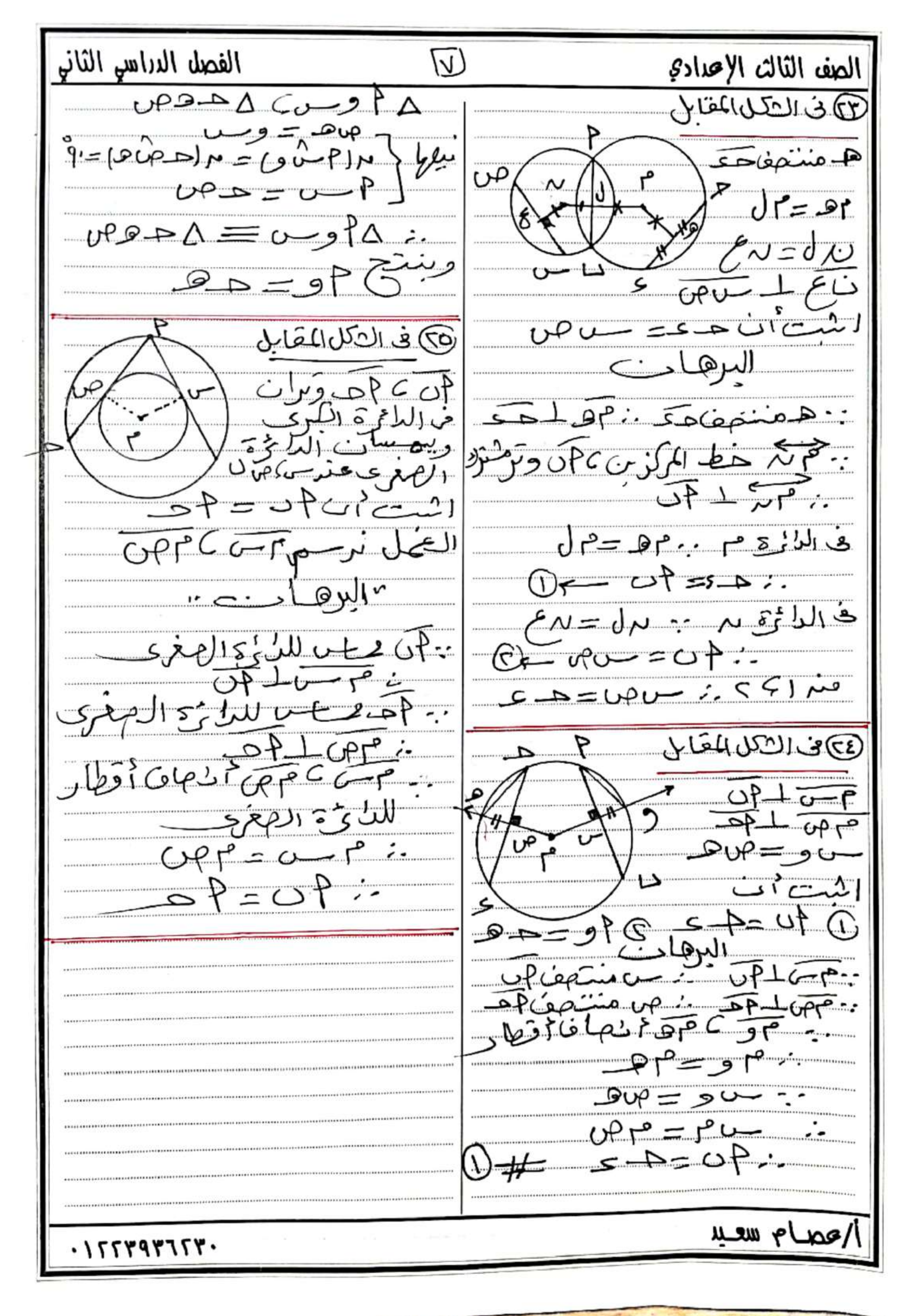
∵ ص منتصف أجـ ∴ م ص ⊥ أجـ
∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب
مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = ٣٦٠°
∴ ق(∠ص م س) = ٣٦٠ − (٩٠ + ٩٠ + ٧٠) = ١١٠°
∵ أب = أجـ
∴ م س = م ص ـــ (١)
∵ م هـ = م ء "أنصاف أقطار" (٢)
من (١)، (٢) بالطرح
∴ هـ ص = س ء

(٢٢) في الشكل المقابل

اثبت أن
م س = م ص

البرهان

∵ م ن خط المركزين، أب وتر مشترك
∴ م ن ⊥ أب، جـ منتصف أب
∴ م ن محور تماثل أب
∵ ء ∈ م ن
∴ ءب = ءأ "وتر = وتر"
∴ م س = م ص "بعد = بعد"





(٢٣) في الشكل المقابل

هـ منتصف حـ ء
م هـ = م ل
ن ل = ن ع
ن ع ⊥ س ص
اثبت أن حـ ء = س ص

البرهان

∵ هـ منتصف حـ ء ∴ م هـ ⊥ حـ ء
∵ م ن خط المركزين ، أ ب وتر مشترك
∴ م ن ⊥ أ ب
في الدائرة م ∵ م هـ = م ل
∴ حـ ء = أ ب ← (١)
في الدائرة ن ∵ ن ل = ن ع
∴ أ ب = س ص ← (٢)
من (١) ، (٢) ∴ س ص = حـ ء

(٢٤) في الشكل المقابل

م س ⊥ أ ب
م ص ⊥ أ حـ
س و = ص هـ
اثبت أن
(١) أ ب = حـ ء (٢) أ و = حـ هـ

البرهان

∵ م س ⊥ أ ب ∴ س منتصف أ ب
∵ م ص ⊥ أ حـ ∴ ص منتصف أ حـ
∵ م و ، م هـ أنصاف أقطار
∴ م و = م هـ
∵ س و = ص هـ
∴ س م = م ص
∴ أ ب = حـ ء (١)

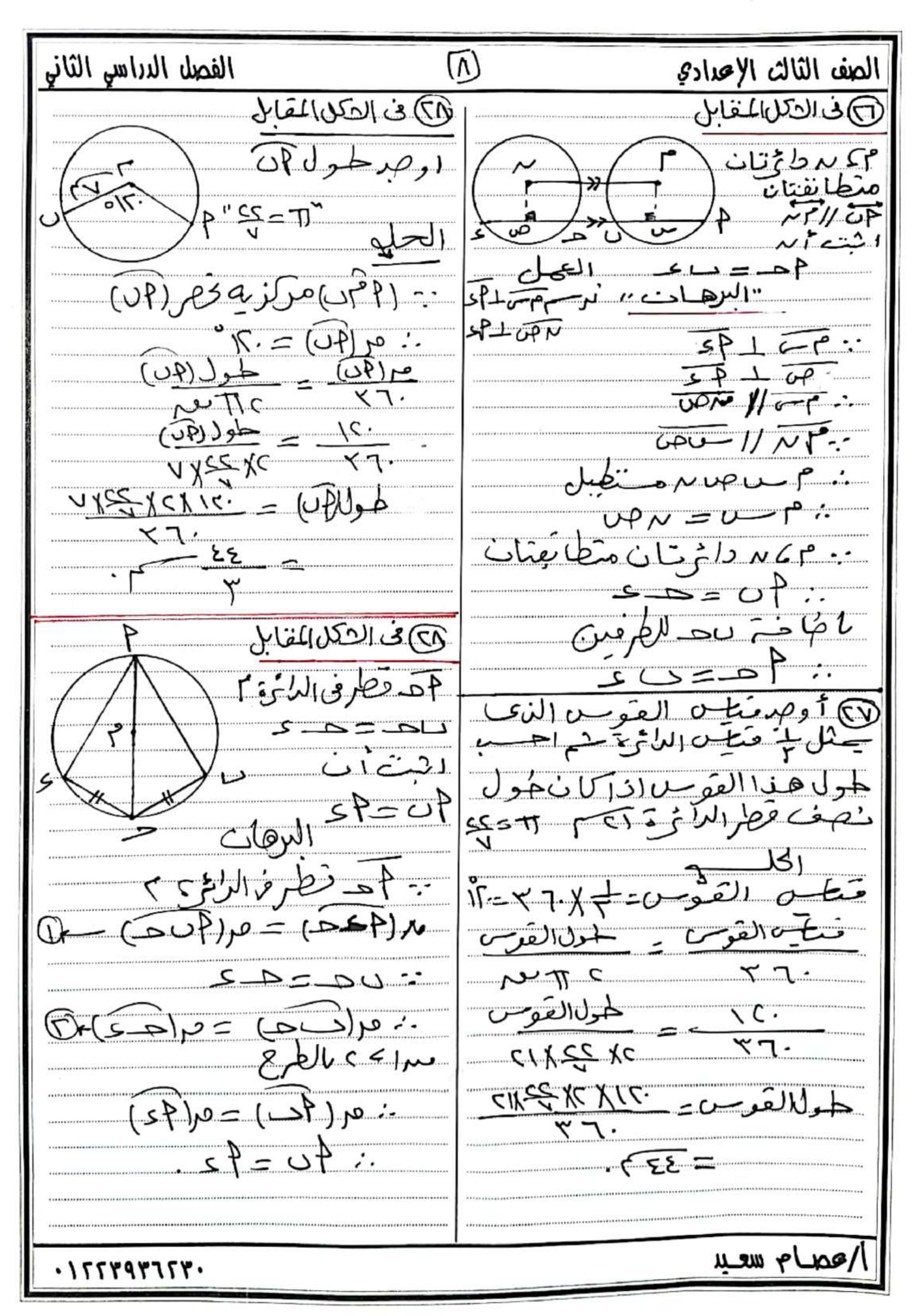
△ أ و س ، △ حـ هـ ص فيهما
ص هـ = و س
ق(∠أ س و) = ق(∠حـ ص هـ) = ٩٠°
أ س = حـ ص
∴ △ أ و س ≡ △ حـ هـ ص
وينتج أن أ و = حـ هـ

(٢٥) في الشكل المقابل

أ ب ، أ حـ وتران في الدائرة الكبرى ويمسان الدائرة الصغرى عند س ، ص
اثبت أن أ ب = أ حـ
العمل نرسم م س ، م ص

البرهان

∵ أ ب مماس للدائرة الصغرى ∴ م س ⊥ أ ب
∵ أ حـ مماس للدائرة الصغرى ∴ م ص ⊥ أ حـ
∵ م س ، م ص أنصاف أقطار للدائرة الصغرى
∴ م س = م ص
∴ أ ب = أ حـ





(٢٦) في الشكل المقابل

م ، ن دائرتان متطابقتان

أب // م ن

أثبت أن أحـ = ب ء

العمل: نرسم م س ⊥ أء ، ن ص ⊥ أء

البرهان:

∵ م س ⊥ أء

، ن ص ⊥ أء

∴ م س // ن ص

∵ م ن // س ص

∴ م س ص ن مستطيل

∴ م س = ن ص

∵ م ، ن دائرتان متطابقتان

∴ أب = حـ ء

بإضافة ب حـ للطرفين

∴ أحـ = ب ء

(٢٧) أوجد قياس القوس الذي يمثل $\frac{1}{3}$ قياس الدائرة ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٢١ سم ، $\pi = \frac{22}{7}$

الحل

قياس القوس = ٣٦٠ × $\frac{1}{3}$ = ١٢٠°

$\frac{\text{قياس القوس}}{360} = \frac{\text{طول القوس}}{2\pi \text{نق}}$

$\frac{120}{360} = \frac{\text{طول القوس}}{2 \times \frac{22}{7} \times 21}$

طول القوس = $\frac{120 \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21}{360}$

= ٤٤ سم.

(٢٨) في الشكل المقابل

أوجد طول $\overset{\frown}{أب}$ ، $\pi = \frac{22}{7}$

الحل

∵ ∠(أ م ب) مركزية تحصر $\overset{\frown}{أب}$

∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١٢٠°

$\frac{\text{ق}(\overset{\frown}{أب})}{360} = \frac{\text{طول}(\overset{\frown}{أب})}{2\pi \text{نق}}$

$\frac{120}{360} = \frac{\text{طول}(\overset{\frown}{أب})}{2 \times \frac{22}{7} \times 7}$

طول ($\overset{\frown}{أب}$) = $\frac{120 \times 2 \times \frac{22}{7} \times 7}{360}$

= $\frac{44}{3}$ سم.

(٢٨) في الشكل المقابل

أحـ قطر في الدائرة م

ب حـ = حـ ء

أثبت أن أب = أء

البرهان

∵ أحـ قطر في الدائرة م

ق($\overset{\frown}{أءحـ}$) = ق($\overset{\frown}{أبحـ}$) ← (١)

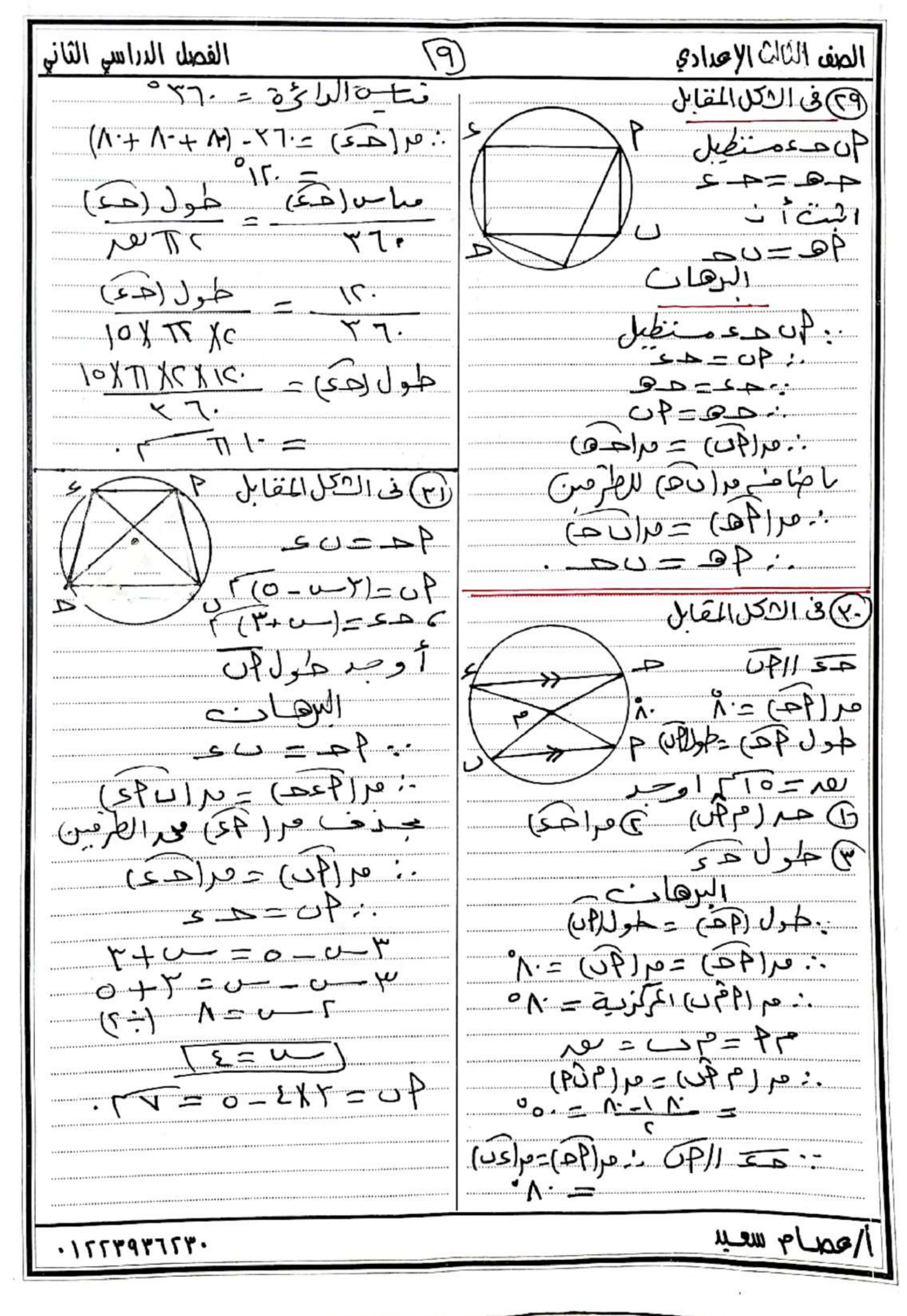
∵ ب حـ = حـ ء

∴ ق($\overset{\frown}{بحـ}$) = ق($\overset{\frown}{حـء}$) ← (٢)

من ١ ، ٢ بالطرح

∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{أء}$)

∴ أب = أء.





(٢٩) في الشكل المقابل

أ ب حـ ء مستطيل

حـ هـ = حـ ء

اثبت أن

أ هـ = ب حـ

البرهان

∵ أ ب حـ ء مستطيل

∴ أ ب = حـ ء

∵ حـ ء = حـ هـ

∴ حـ هـ = أ ب

∴ ق(أ ب⌒) = ق(حـ هـ⌒)

بإضافة ق(ب حـ⌒) للطرفين

∴ ق(أ هـ⌒) = ق(ب حـ⌒)

∴ أ هـ = ب حـ .

(٣٠) في الشكل المقابل

حـ ء // أ ب

ق(أ حـ⌒) = ٨٠°

طول (أ حـ⌒) = طول (أ ب⌒)

نق = ١٥ سم أوجد

(١) ق(∠م أ ب) (٢) ق(حـ ء⌒)

(٣) طول حـ ء⌒

البرهان

∵ طول (أ حـ⌒) = طول (أ ب⌒)

∴ ق(أ حـ⌒) = ق(أ ب⌒) = ٨٠°

∴ ق(∠أ م ب) المركزية = ٨٠°

م أ = م ب = نق

∴ ق(∠م ب أ) = ق(∠م أ ب) = (١٨٠ − ٨٠) ÷ ٢ = ٥٠°

∵ حـ ء // أ ب ∴ ق(أ حـ⌒) = ق(ء ب⌒) = ٨٠°

قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(حـ ء⌒) = ٣٦٠ − (٨٠ + ٨٠ + ٨٠) = ١٢٠°

قياس (حـ ء⌒) ÷ ٣٦٠ = طول (حـ ء⌒) ÷ ٢ π نق

١٢٠ ÷ ٣٦٠ = طول (حـ ء⌒) ÷ (٢ × π × ١٥)

طول (حـ ء⌒) = (١٢٠ × ٢ × π × ١٥) ÷ ٣٦٠

= ١٠ π سم .

(٣١) في الشكل المقابل

أ حـ = ب ء

أ ب = (٣س − ٥) سم ، حـ ء = (س + ٣) سم

أوجد طول أ ب

البرهان

∵ أ حـ = ب ء

∴ ق(أ ء حـ⌒) = ق(ب أ ء⌒)

بحذف ق(أ ء⌒) من الطرفين

∴ ق(أ ب⌒) = ق(حـ ء⌒)

∴ أ ب = حـ ء

٣س − ٥ = س + ٣

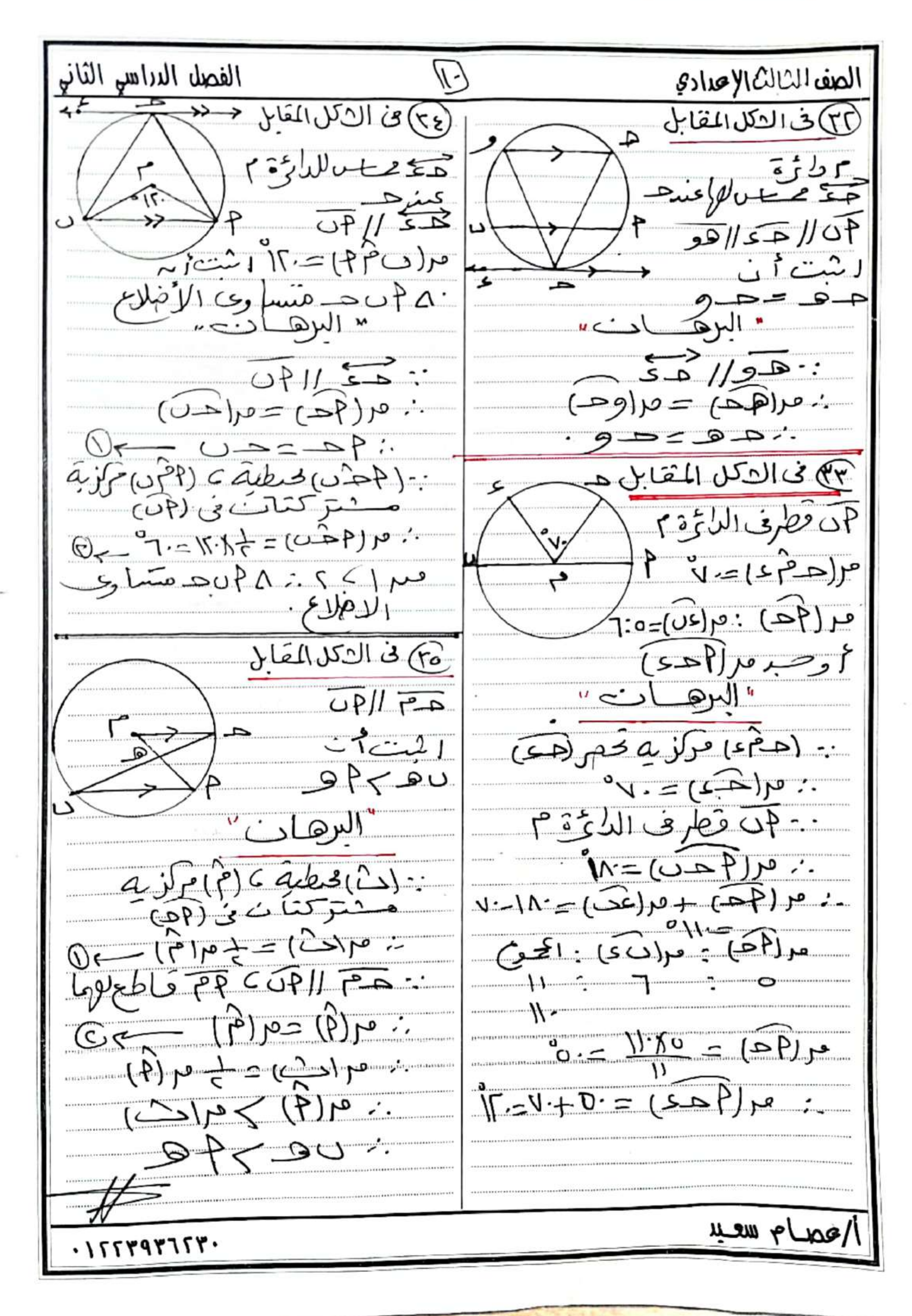
٣س − س = ٣ + ٥

٢س = ٨ (÷٢)

س = ٤

أ ب = ٣ × ٤ − ٥ = ٧ سم .


أ/ عصام سعيد ٠١٢٢٣٩٣٦٢٣٠





(٣٢) في الشكل المقابل

م دائرة

جـ ء مماس لها عند جـ

أ ب // جـ ء // هـ و

اثبت أن

جـ هـ = جـ و

"البرهان"

∵ هـ و // جـ ء

∴ ق(هـ جـ) = ق(و جـ)

∴ جـ هـ = جـ و .

(٣٣) في الشكل المقابل

أ ب قطر في الدائرة م

ق(∠جـ م ء) = ٧٠°

ق(أ جـ) : ق(ب ء) = ٥ : ٦

أوجد ق(أ جـ ء)

"البرهان"

∵ (∠جـ م ء) مركزية تحصر (جـ ء)

∴ ق(جـ ء) = ٧٠°

∵ أ ب قطر في الدائرة م

∴ ق(أ جـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(أ جـ) + ق(ء ب) = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠°

ق(أ جـ) : ق(ب ء) : المجموع

٥ : ٦ : ١١

١١٠

ق(أ جـ) = (١١٠ × ٥) / ١١ = ٥٠°

∴ ق(أ جـ ء) = ٥٠ + ٧٠ = ١٢٠°

(٣٤) في الشكل المقابل

جـ ء مماس للدائرة م عند جـ

جـ ء // أ ب

ق(∠أ م ب) = ١٢٠° اثبت أن

△ أ ب جـ متساوي الأضلاع

"البرهان"

∵ جـ ء // أ ب

∴ ق(أ جـ) = ق(جـ ب)

∴ أ جـ = جـ ب ← (١)

∵ (∠أ جـ ب) محيطية ، (∠أ م ب) مركزية مشتركتان في (أ ب)

∴ ق(∠أ جـ ب) = ½ × ١٢٠ = ٦٠° ← (٢)

من ١ ، ٢ ∴ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع .

(٣٥) في الشكل المقابل

جـ م // أ ب

اثبت أن

ب هـ > أ هـ

"البرهان"

∵ (∠ب) محيطية ، (∠م) مركزية مشتركتان في (أ جـ)

∴ ق(∠ب) = ½ ق(∠م) ← (١)

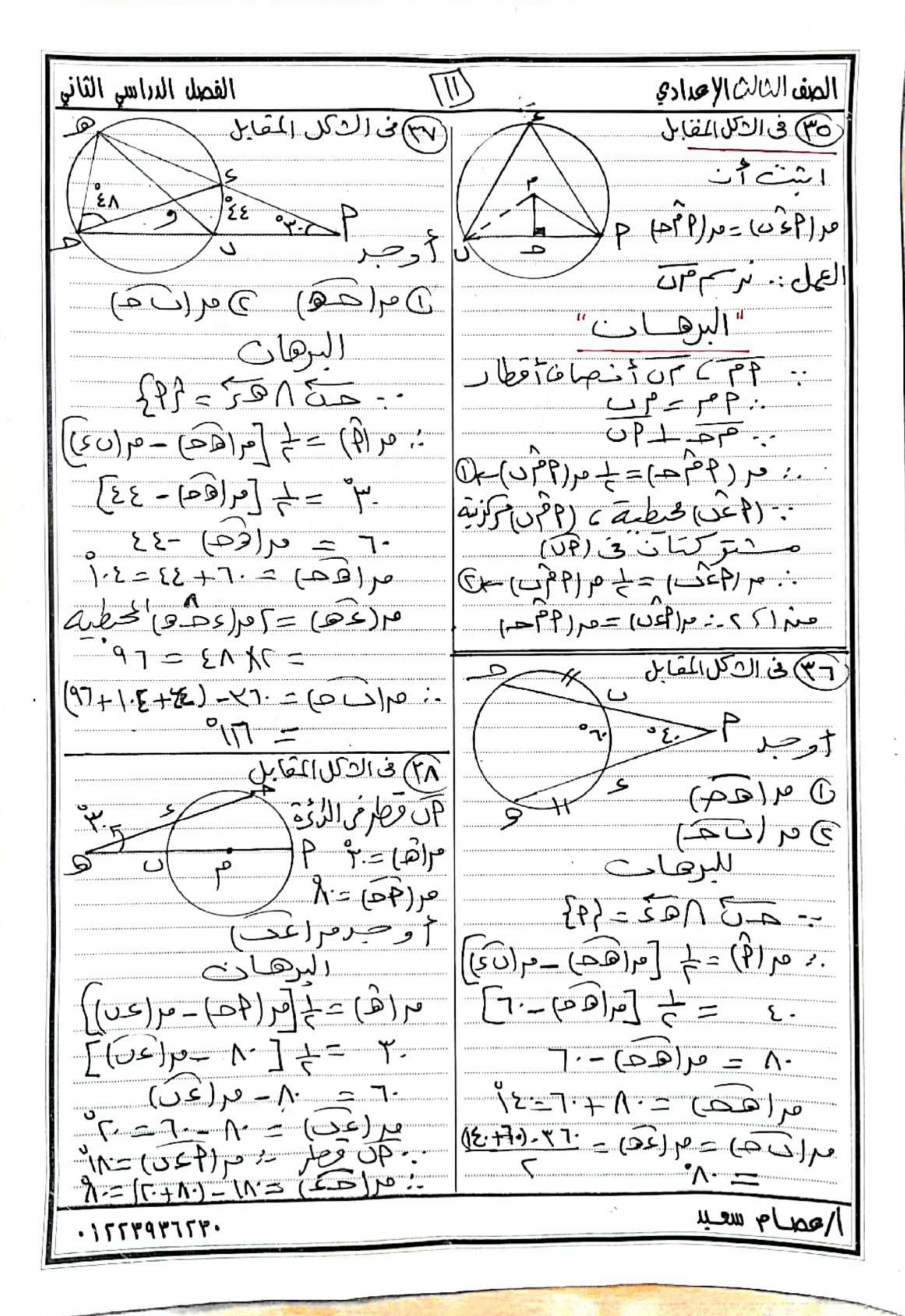
∵ جـ م // أ ب ، أ م قاطع لهما

∴ ق(∠أ) = ق(∠م) ← (٢)

∴ ق(∠ب) = ½ ق(∠أ)

∴ ق(∠أ) > ق(∠ب)

∴ ب هـ > أ هـ



**(٣٥) في الشكل المقابل**

اثبت أن: مر(∠ أ ع ب) = مر(∠ أ م ح)

العمل: نرسم م ب

"البرهان"

∵ م أ ، م ب أنصاف أقطار

∴ م أ = م ب

∵ م ح ⊥ أ ب

∴ مر(∠ أ م ح) = ½ مر(∠ أ م ب) ← (١)

∵ (∠ أ ع ب) محيطية ، (∠ أ م ب) مركزية مشتركتان في (أ ب)

∴ مر(∠ أ ع ب) = ½ مر(∠ أ م ب) ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ مر(∠ أ ع ب) = مر(∠ أ م ح)

**(٣٦) في الشكل المقابل**

أوجد: ① مر(هـ ح) ② مر(ب ح)

البرهان

∵ ح ب ∩ هـ ء = {أ}

∴ مر(∠ أ) = ½ [مر(هـ ح) − مر(ب ء)]

٤٠ = ½ [مر(هـ ح) − ٦٠]

٨٠ = مر(هـ ح) − ٦٠

مر(هـ ح) = ٨٠ + ٦٠ = ١٤٠°

مر(ب ح) = مر(ء هـ) = (٣٦٠ − (١٤٠ + ٦٠)) ÷ ٢

= ٨٠°

**(٣٧) في الشكل المقابل**

أوجد: ① مر(هـ ح) ② مر(ب ح)

البرهان

∵ ح ب ∩ هـ ء = {أ}

∴ مر(∠ أ) = ½ [مر(هـ ح) − مر(ب ء)]

٣٠ = ½ [مر(هـ ح) − ٤٤]

٦٠ = مر(هـ ح) − ٤٤

مر(هـ ح) = ٦٠ + ٤٤ = ١٠٤°

مر(ء هـ) = ٢ مر(∠ ء ح هـ) المحيطية

= ٢ × ٤٨ = ٩٦°

∴ مر(ب ح) = ٣٦٠ − (٤٤ + ١٠٤ + ٩٦)

= ١١٦°

**(٣٨) في الشكل المقابل**

أ ب قطر في الدائرة

مر(∠ هـ) = ٣٠°

مر(أ ح) = ٨٠°

أوجد مر(ء ح)

البرهان

مر(∠ هـ) = ½ [مر(أ ح) − مر(ء ب)]

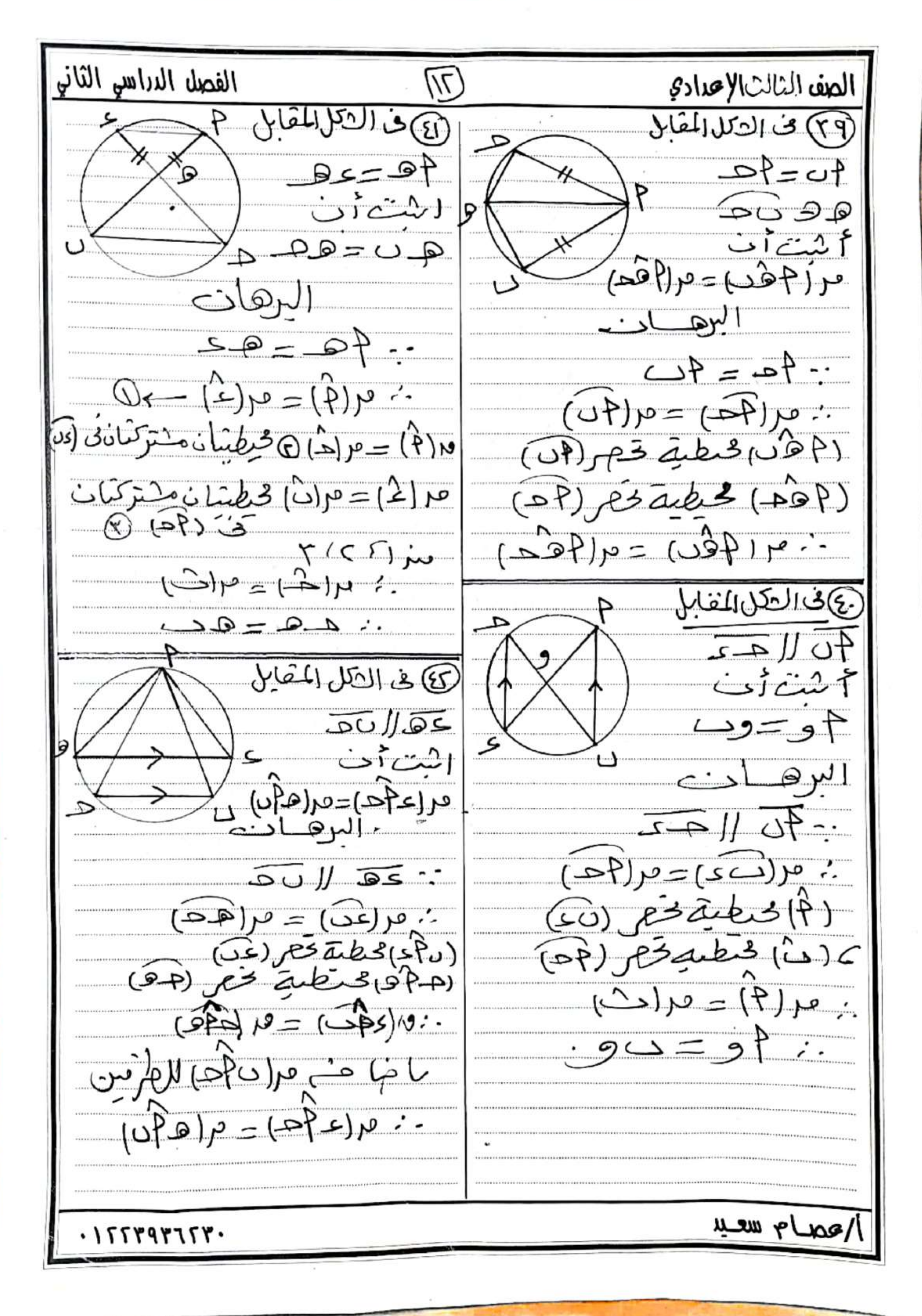
٣٠ = ½ [٨٠ − مر(ء ب)]

٦٠ = ٨٠ − مر(ء ب)

مر(ء ب) = ٨٠ − ٦٠ = ٢٠°

∵ أ ب قطر ∴ مر(أ ح ء ب) = ١٨٠°

∴ مر(ح ء) = ١٨٠ − (٨٠ + ٢٠) = ٨٠°





**٣٩) في الشكل المقابل**

أب = أجـ ، هـ ∈ $\overset{\frown}{بجـ}$

أثبت أن

م(∠أهـب) = م(∠أهـجـ)

**البرهان**

∵ أجـ = أب

∴ م($\overset{\frown}{أجـ}$) = م($\overset{\frown}{أب}$)

(∠أهـب) محيطية تحصر ($\overset{\frown}{أب}$)

(∠أهـجـ) محيطية تحصر ($\overset{\frown}{أجـ}$)

∴ م(∠أهـب) = م(∠أهـجـ)

**٤٠) في الشكل المقابل**

أب // جـ د

أثبت أن

أو = وب

**البرهان**

∵ أب // جـ د

∴ م($\overset{\frown}{ب د}$) = م($\overset{\frown}{أجـ}$)

(∠أ) محيطية تحصر ($\overset{\frown}{ب د}$)

(∠ب) محيطية تحصر ($\overset{\frown}{أجـ}$)

∴ م(∠أ) = م(∠ب)

∴ أو = ب و

**٤١) في الشكل المقابل**

أهـ = د هـ

أثبت أن

هـ ب = هـ جـ

**البرهان**

∵ أهـ = هـ د

∴ م(∠أ) = م(∠د) ← ①

م(∠أ) = م(∠جـ) ② محيطيتان مشتركتان في (د ب)

م(∠د) = م(∠ب) محيطيتان مشتركتان في (أجـ) ③

من ١ ، ٢ ، ٣

∴ م(∠جـ) = م(∠ب)

∴ جـ هـ = هـ ب

**٤٢) في الشكل المقابل**

د هـ // ب جـ

أثبت أن

م(∠د أجـ) = م(∠هـ أب)

**البرهان**

∵ د هـ // ب جـ

∴ م($\overset{\frown}{د ب}$) = م($\overset{\frown}{هـ جـ}$)

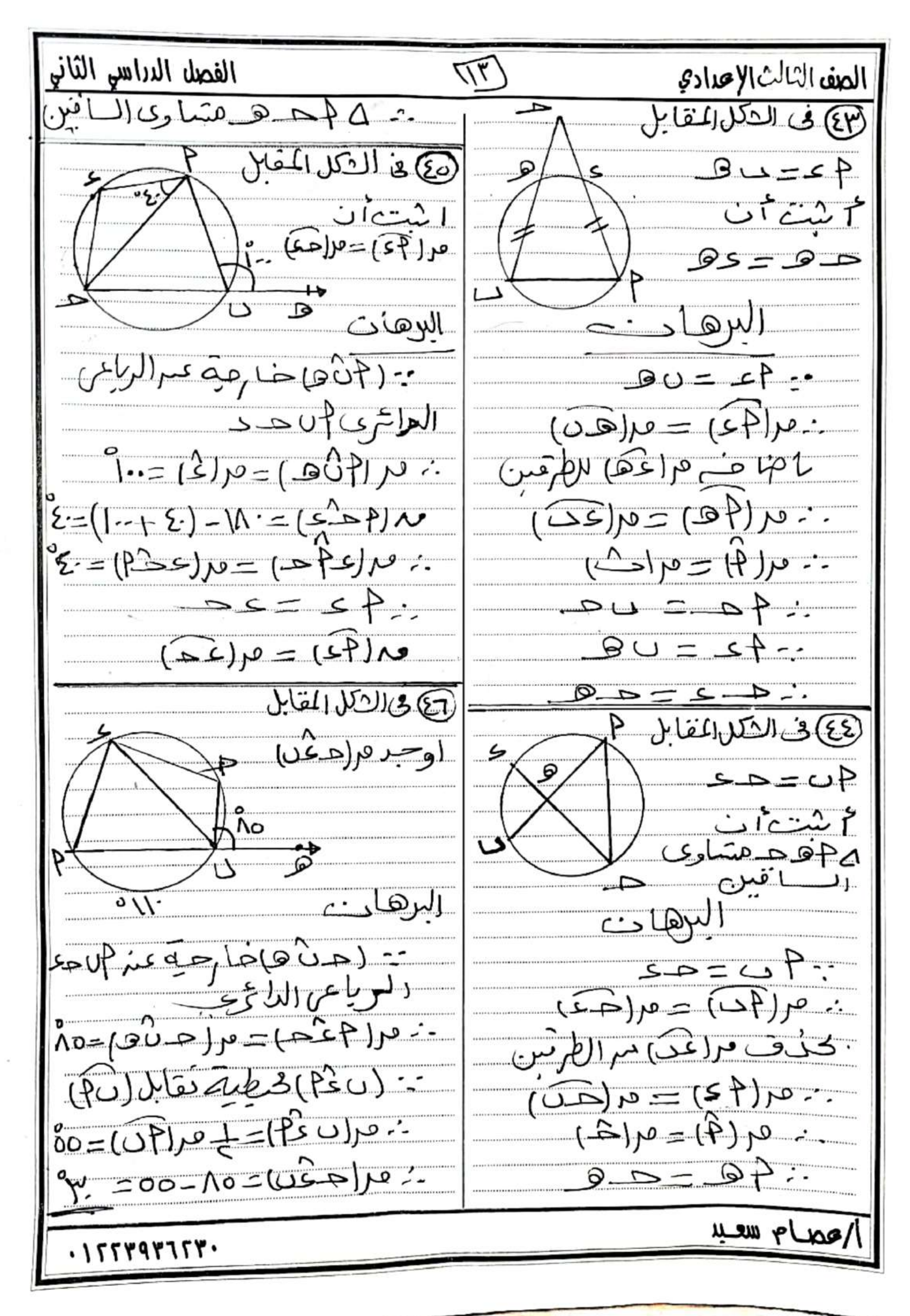
(∠ب أد) محيطية تحصر ($\overset{\frown}{د ب}$)

(∠جـ أهـ) محيطية تحصر ($\overset{\frown}{جـ هـ}$)

∴ م(∠ب أد) = م(∠جـ أهـ)

بإضافة م(∠ب أجـ) للطرفين

∴ م(∠د أجـ) = م(∠هـ أب)





(٤٣) في الشكل المقابل

أ د = ب هـ

أثبت أن

جـ هـ = د هـ

البرهان

∵ أ د = ب هـ

∴ م(⌒أ د) = م(⌒هـ ب)

بإضافة م(⌒د هـ) للطرفين

∴ م(⌒أ هـ) = م(⌒د ب)

∴ م(∠أ) = م(∠ب)

∴ أ جـ = ب جـ

∵ أ د = ب هـ

∴ جـ د = جـ هـ

(٤٤) في الشكل المقابل

أ ب = جـ د

أثبت أن

△ أ هـ جـ متساوي الساقين

البرهان

∵ أ ب = جـ د

∴ م(⌒أ ب) = م(⌒جـ د)

بحذف م(⌒د ب) من الطرفين

∴ م(⌒أ د) = م(⌒جـ ب)

∴ م(∠أ) = م(∠جـ)

∴ أ هـ = جـ هـ

∴ △ أ جـ هـ متساوي الساقين

(٤٥) في الشكل المقابل

أثبت أن

م(⌒أ د) = م(⌒د جـ)

البرهان

∵ (∠أ ب هـ) خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ د

∴ م(∠أ ب هـ) = م(∠د) = ١٠٠°

م(∠أ جـ د) = ١٨٠ − (٤٠ + ١٠٠) = ٤٠°

∴ م(∠د أ جـ) = م(∠د جـ أ) = ٤٠°

∴ أ د = د جـ

م(⌒أ د) = م(⌒د جـ)

(٤٦) في الشكل المقابل

أوجد م(∠جـ د ب)

البرهان

∵ (∠جـ ب هـ) خارجة عن الرباعي الدائري أ ب جـ د

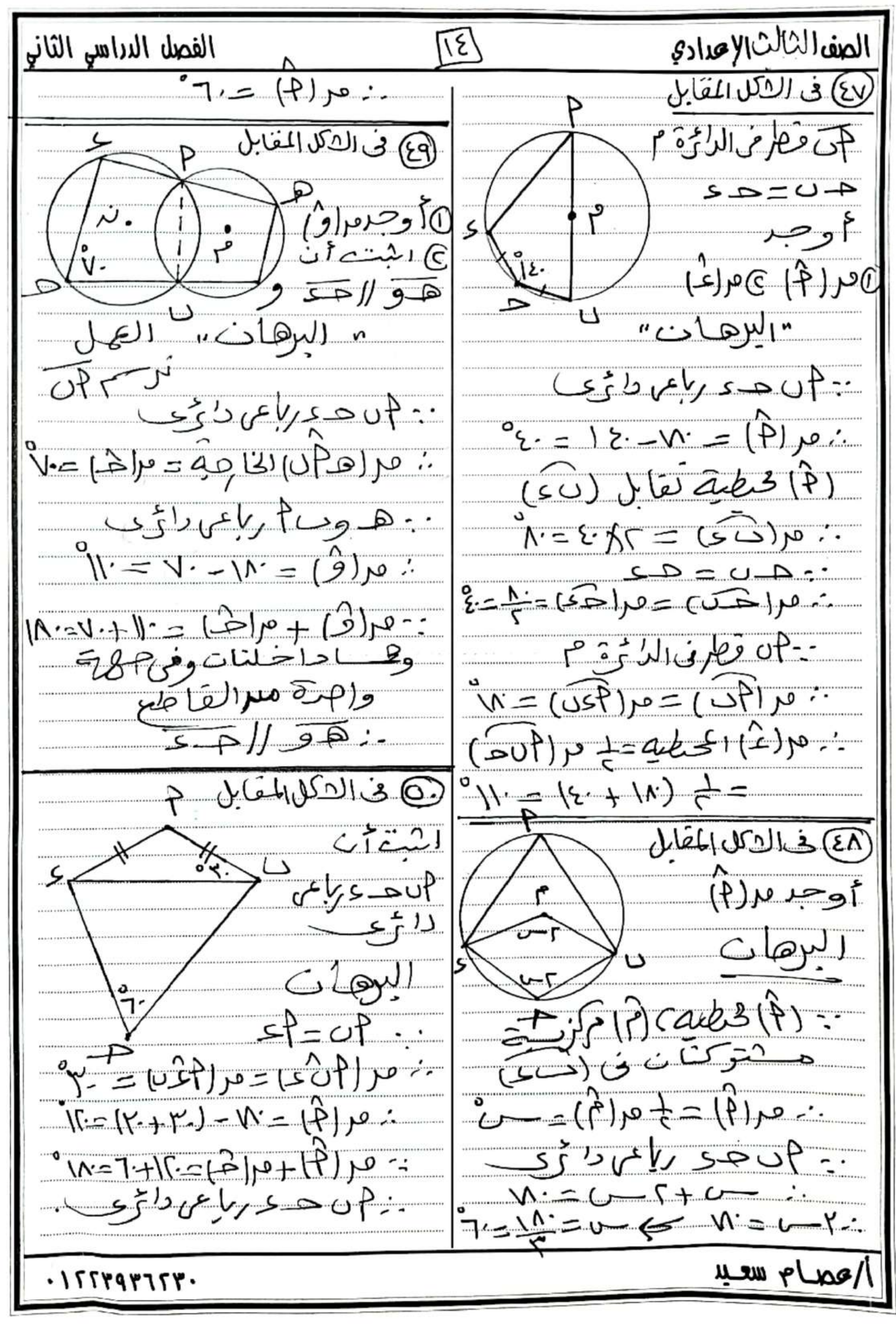
∴ م(∠أ د جـ) = م(∠جـ ب هـ) = ٨٥°

∵ (∠ب د أ) محيطية تقابل (⌒ب أ)

∴ م(∠ب د أ) = ½ م(⌒أ ب) = ٥٥°

∴ م(∠جـ د ب) = ٨٥ − ٥٥ = ٣٠°

أ/ عصام سعيد
٠١٢٢٣٩٣٦٢٣٠





(٤٧) في الشكل المقابل

أب قطر في الدائرة م

جـ ب = جـ د

أوجد

① مـ(∠أ) ② مـ(∠ع)

"البرهان"

∵ أب جـ د رباعي دائري

∴ مـ(∠أ) = ١٨٠ − ١٤٠ = ٤٠°

(∠أ) محيطية تقابل (ب د⌢)

∴ مـ(ب د⌢) = ٢ × ٤٠ = ٨٠°

∵ جـ ب = جـ د

∴ مـ(جـ ب⌢) = مـ(جـ د⌢) = ٨٠ ÷ ٢ = ٤٠°

∵ أب قطر في الدائرة م

∴ مـ(أ د ب⌢) = مـ(أ جـ ب⌢) = ١٨٠°

∴ مـ(∠ع) المحيطية = ½ مـ(أ ب جـ⌢)

= ½ (١٨٠ + ٤٠) = ١١٠°

(٤٨) في الشكل المقابل

أوجد مـ(∠أ)

البرهان

∵ (∠أ) محيطية، (∠م) مركزية مشتركتان في (ب د⌢)

∴ مـ(∠أ) = ½ مـ(∠م) = س°

∵ أب جـ د رباعي دائري

∴ س + ٢س = ١٨٠°

∴ ٣س = ١٨٠ ⟸ س = ١٨٠ ÷ ٣ = ٦٠°

∴ مـ(∠أ) = ٦٠°

(٤٩) في الشكل المقابل

① أوجد مـ(∠و)

② اثبت أن هـ و // جـ د

"البرهان" العمل: نرسم أب

∵ أب جـ د رباعي دائري

∴ مـ(∠هـ أ ب) الخارجة = مـ(∠جـ) = ٧٠°

∵ هـ و ب أ رباعي دائري

∴ مـ(∠و) = ١٨٠ − ٧٠ = ١١٠°

∵ مـ(∠و) + مـ(∠جـ) = ١١٠ + ٧٠ = ١٨٠°

وهما داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع

∴ هـ و // جـ د

(٥٠) في الشكل المقابل

اثبت أن أب جـ د رباعي دائري

البرهان

∵ أب = أد

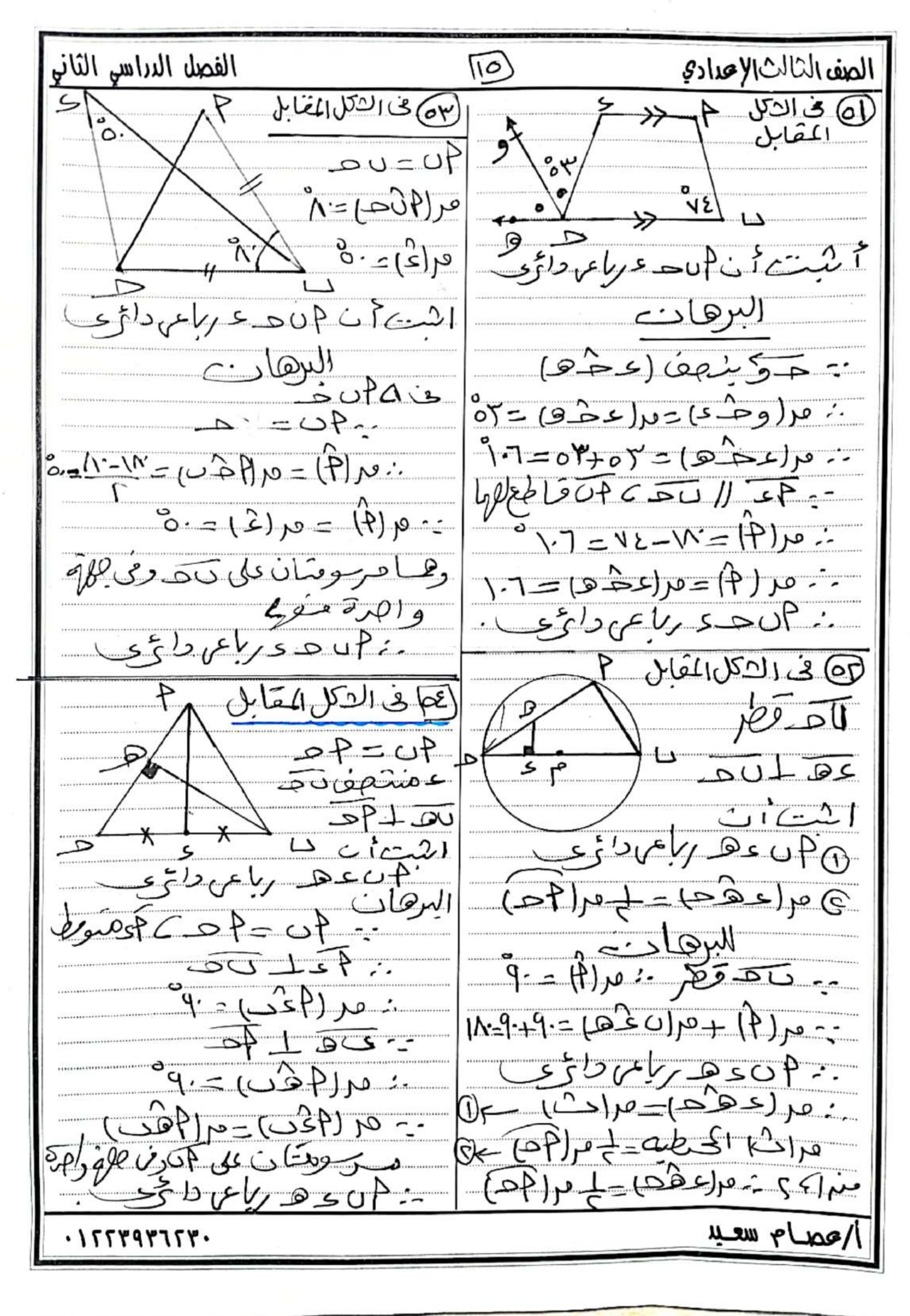
∴ مـ(∠أ ب د) = مـ(∠أ د ب) = ٣٠°

∴ مـ(∠أ) = ١٨٠ − (٣٠ + ٣٠) = ١٢٠°

∵ مـ(∠أ) + مـ(∠جـ) = ١٢٠ + ٦٠ = ١٨٠°

∴ أب جـ د رباعي دائري

أ/ عصام سعيد ٠١٢٢٢٩٣٦٢٣٠



٥١ في الشكل المقابل

أثبت أن أ ب جـ د رباعي دائري

البرهان

∵ جـ و ينصف (∠د جـ هـ)

∴ ق(∠و جـ د) = ق(∠د جـ هـ) = ٥٣°

∴ ق(∠د جـ هـ) = ٥٣ + ٥٣ = ١٠٦°

∵ أ د // ب جـ ، أ ب قاطع لهما

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − ٧٤ = ١٠٦°

∴ ق(∠أ) = ق(∠د جـ هـ) = ١٠٦°

∴ أ ب جـ د رباعي دائري.

٥٢ في الشكل المقابل

ب جـ قطر

د هـ ⊥ ب جـ

أثبت أن

① أ ب د هـ رباعي دائري

② ق(∠د هـ جـ) = ½ ق(أ⌒جـ)

البرهان

∵ ب جـ قطر ∴ ق(∠أ) = ٩٠°

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب د هـ) = ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

∴ أ ب د هـ رباعي دائري

∴ ق(∠د هـ جـ) = ق(∠ب) ← ①

ق∠ب المحيطية = ½ ق(أ⌒جـ) ← ②

من ١، ٢ ∴ ق(∠د هـ جـ) = ½ ق(أ⌒جـ)

٥٣ في الشكل المقابل

أ ب = ب جـ

ق(∠أ ب جـ) = ٨٠°

ق(∠د) = ٥٠°

أثبت أن أ ب جـ د رباعي دائري

البرهان

في △ أ ب جـ

∵ أ ب = ب جـ

∴ ق(∠أ) = ق(∠أ جـ ب) = (١٨٠ − ٨٠) ÷ ٢ = ٥٠°

∴ ق(∠أ) = ق(∠د) = ٥٠°

وهما مرسومتان على ب جـ وفي جهة واحدة منه

∴ أ ب جـ د رباعي دائري

٥٤ في الشكل المقابل

أ ب = أ جـ

د منتصف ب جـ

ب هـ ⊥ أ جـ

أثبت أن أ ب د هـ رباعي دائري

البرهان

∵ أ ب = أ جـ ، أ د متوسط

∴ أ د ⊥ ب جـ

∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠°

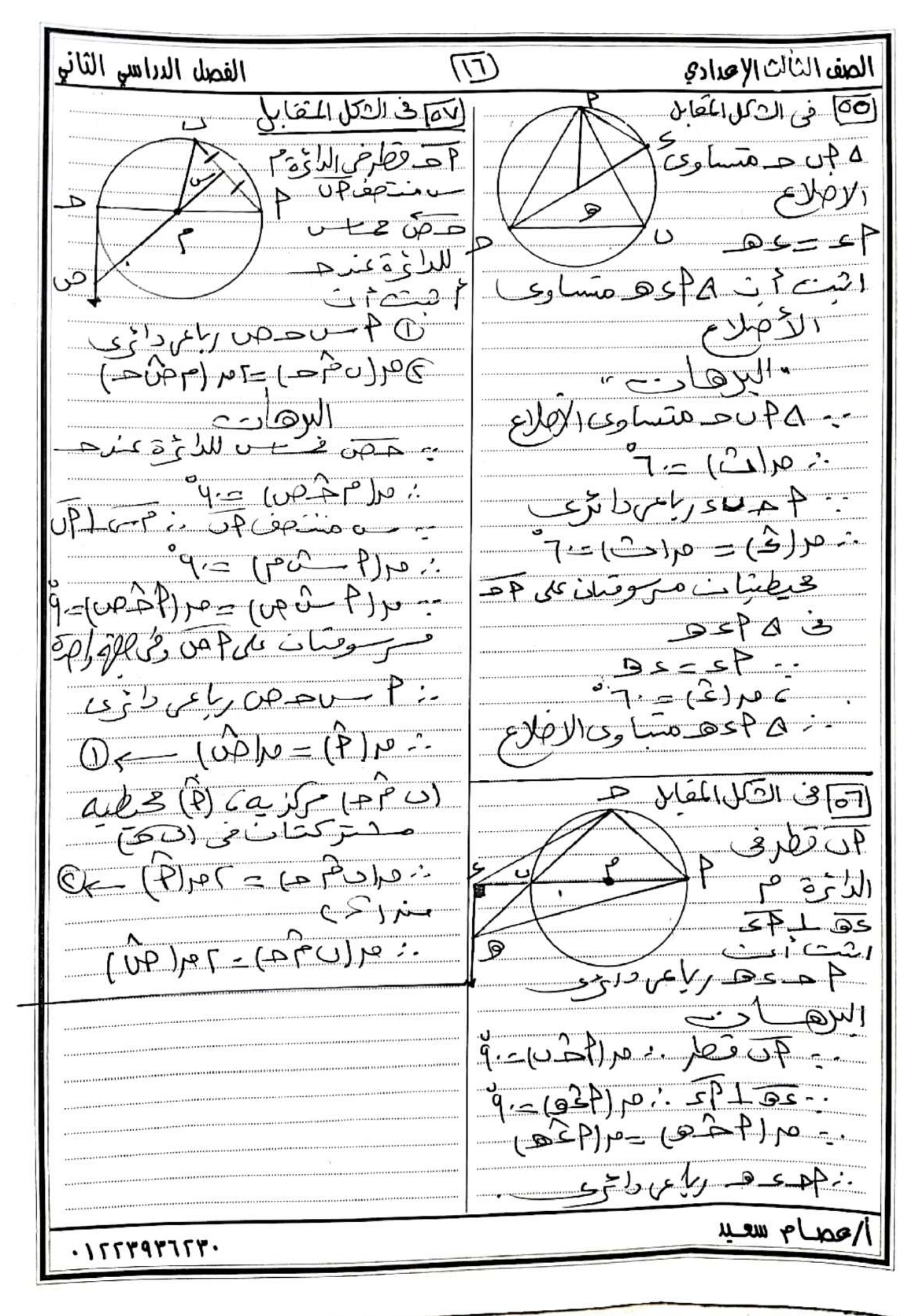
∵ ب هـ ⊥ أ جـ

∴ ق(∠أ هـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠أ هـ ب)

مرسومتان على أ ب وفي جهة واحدة

∴ أ ب د هـ رباعي دائري.





**٥٥** في الشكل المقابل

△ أب جـ متساوي الأضلاع

أء = ءهـ

اثبت أن △ أءهـ متساوي الأضلاع

"البرهان"

∵ △ أب جـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠ب) = ٦٠°

∵ أ جـ ب ء رباعي دائري

∴ ق(∠ء) = ق(∠ب) = ٦٠°

محيطيتان مرسومتان على أجـ

في △ أءهـ

∵ أء = ءهـ

، ق(∠ء) = ٦٠°

∴ △ أءهـ متساوي الأضلاع

**٥٦** في الشكل المقابل

أب قطر في الدائرة م

ءهـ ⊥ أء

اثبت أن

أ جـ ء هـ رباعي دائري

البرهان

∵ أب قطر ∴ ق(∠أجـب) = ٩٠°

∵ ءهـ ⊥ أء ∴ ق(∠أءهـ) = ٩٠°

∴ ق(∠أجـهـ) = ق(∠أءهـ)

∴ أجـءهـ رباعي دائري

**٥٧** في الشكل المقابل

أجـ قطر في الدائرة م

س منتصف أب

جـص مماس للدائرة عند جـ

أثبت أن

① أ س جـ ص رباعي دائري

② ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠م ص جـ)

البرهان

∵ جـص مماس للدائرة عند جـ

∴ ق(∠م جـ ص) = ٩٠°

∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠أ س م) = ٩٠°

∵ ق(∠أ س ص) = ق(∠أ جـ ص) = ٩٠°

مرسومتان على أص وفي جهة واحدة

∴ أ س جـ ص رباعي دائري

∴ ق(∠أ) = ق(∠ص) ← ①

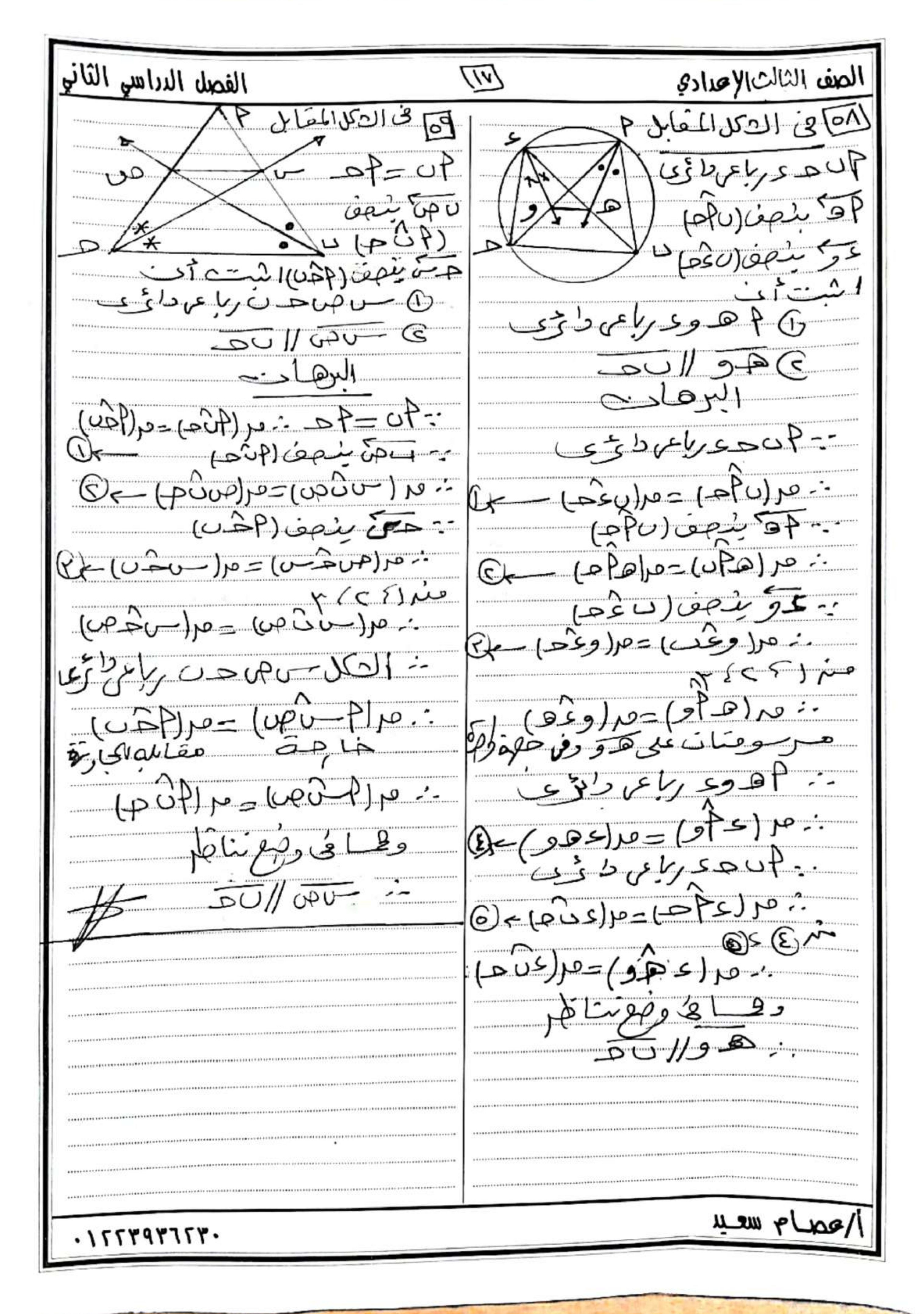
∠ب م جـ مركزية، ∠أ محيطية

مشتركتان في (ب جـ)

∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠أ) ← ②

من ①، ②

∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠ص)





**٥٨** في الشكل المقابل

أ ب جـ د رباعي دائري

أ هـ ينصف (∠ب أ جـ)

د و ينصف (∠ب د جـ)

اثبت أن

① أ هـ و د رباعي دائري

② هـ و // ب جـ

البرهان

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب د جـ) ← ①

∵ أ هـ ينصف (∠ب أ جـ)

∴ ق(∠هـ أ ب) = ق(∠هـ أ جـ) ← ②

∵ د و ينصف (∠ب د جـ)

∴ ق(∠و د ب) = ق(∠و د جـ) ← ③

من ①، ②، ③

∴ ق(∠هـ أ و) = ق(∠و د هـ)

مرسومتان على هـ و وفي جهة واحدة

∴ أ هـ و د رباعي دائري

∴ ق(∠د أ و) = ق(∠د هـ و) ← ④

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠د ب جـ) ← ⑤

من ④، ⑤

∴ ق(∠د هـ و) = ق(∠د ب جـ)

وهما في وضع تناظر

∴ هـ و // ب جـ

**٥٩** في الشكل المقابل

أ ب = أ جـ

ب ص ينصف (∠أ ب جـ)

جـ س ينصف (∠أ جـ ب) اثبت أن

① س ص جـ ب رباعي دائري

② س ص // ب جـ

البرهان

∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) ← ①

∵ ب ص ينصف (∠أ ب جـ)

∴ ق(∠س ب ص) = ق(∠ص ب جـ) ← ②

∵ جـ س ينصف (∠أ جـ ب)

∴ ق(∠ص جـ س) = ق(∠س جـ ب) ← ③

من ①، ②، ③

∴ ق(∠س ب ص) = ق(∠س جـ ص)

∴ الشكل س ص جـ ب رباعي دائري

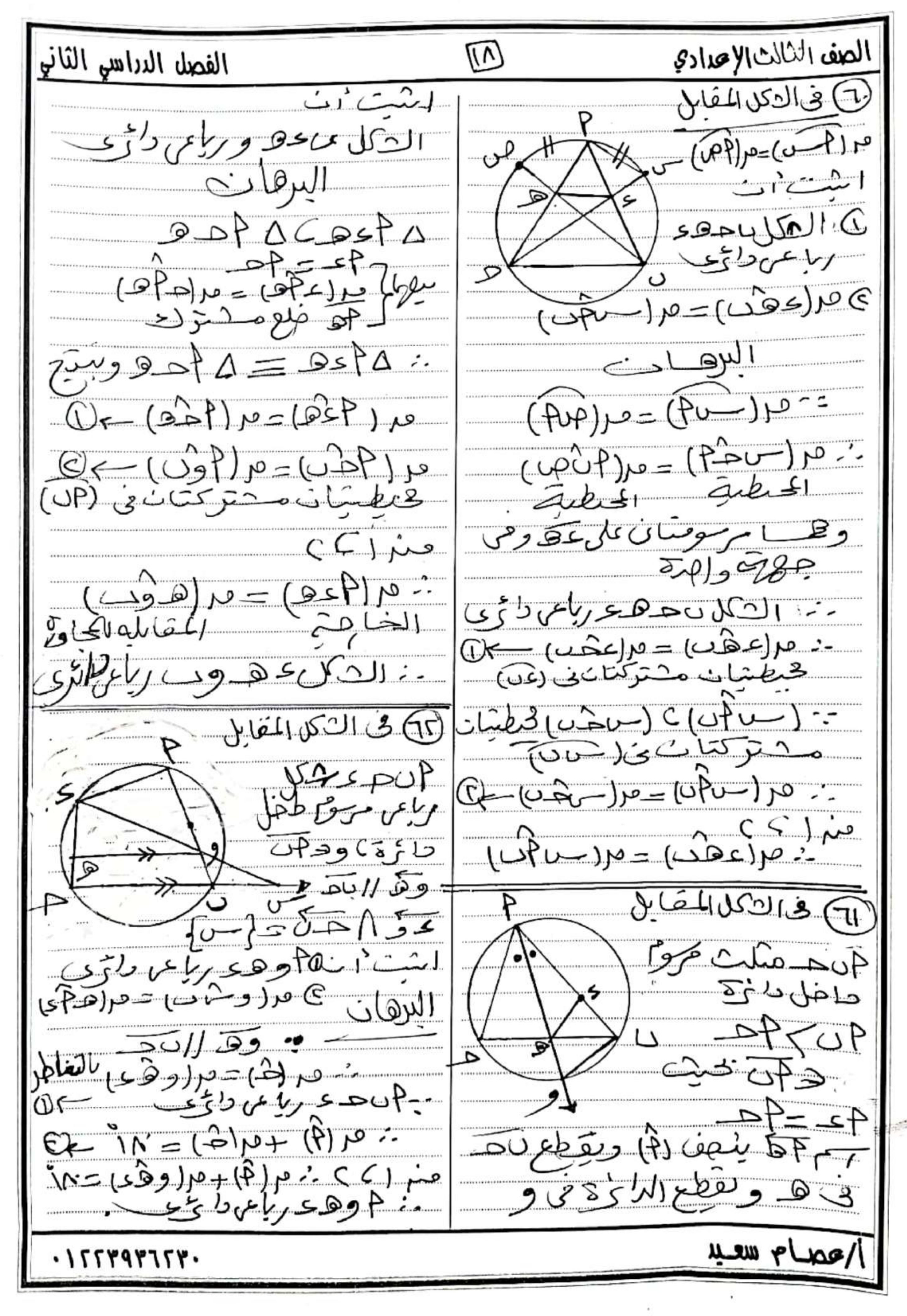
∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠أ جـ ب)

خارجة مقابلة للمجاورة

∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠أ ب جـ)

وهما في وضع تناظر

∴ س ص // ب جـ



(٦٠) في الشكل المقابل

مَ(أ س) = مَ(أ ص)

اثبت أن:

(١) الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري

(٢) مَ(∠ء هـ ب) = مَ(∠س جـ ب)

البرهان

∵ مَ(س أ) = مَ(أ ص)

∴ مَ(∠س جـ أ) = مَ(∠أ ب ص) المحيطية

وهما مرسومتان على ء هـ ومن جهة واحدة

∴ الشكل ب جـ هـ ء رباعي دائري

∴ مَ(∠ء هـ ب) = مَ(∠ء جـ ب) ← (١) محيطيتان مشتركتان في (ء ب)

∵ (∠س أ ب) ، (∠س جـ ب) محيطيتان مشتركتان في (س ب)

∴ مَ(∠س أ ب) = مَ(∠س جـ ب) ← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ مَ(∠ء هـ ب) = مَ(∠س أ ب)

(٦١) في الشكل المقابل

أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة

أ ب < أ جـ

ء ∈ أ جـ حيث

أ ء = أ ب

رسم أ هـ ينصف (∠أ) ويقطع ب جـ في هـ ويقطع الدائرة في و

اثبت أن:

الشكل ء هـ و ب رباعي دائري

البرهان

∆ أ ء هـ ، ∆ أ ب هـ

أ ء = أ ب

مَ(∠ء أ هـ) = مَ(∠ب أ هـ)

أ هـ ضلع مشترك

∴ ∆ أ ء هـ ≡ ∆ أ ب هـ وينتج

مَ(∠أ ء هـ) = مَ(∠أ ب هـ) ← (١)

مَ(∠أ جـ ب) = مَ(∠أ و ب) ← (٢) محيطيتان مشتركتان في (أ ب)

من (١) ، (٢)

∴ مَ(∠أ ء هـ) = مَ(∠هـ و ب) الخارجة = المقابلة للمجاورة

∴ الشكل ء هـ و ب رباعي دائري

(٦٢) في الشكل المقابل

أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، و ∈ أ ب

و هـ // ب جـ

ء و ∩ جـ ب = {س}

اثبت أن: (١) أ و هـ ء رباعي دائري

(٢) مَ(∠و س ب) = مَ(∠هـ أ ء)

البرهان

∵ و هـ // ب جـ

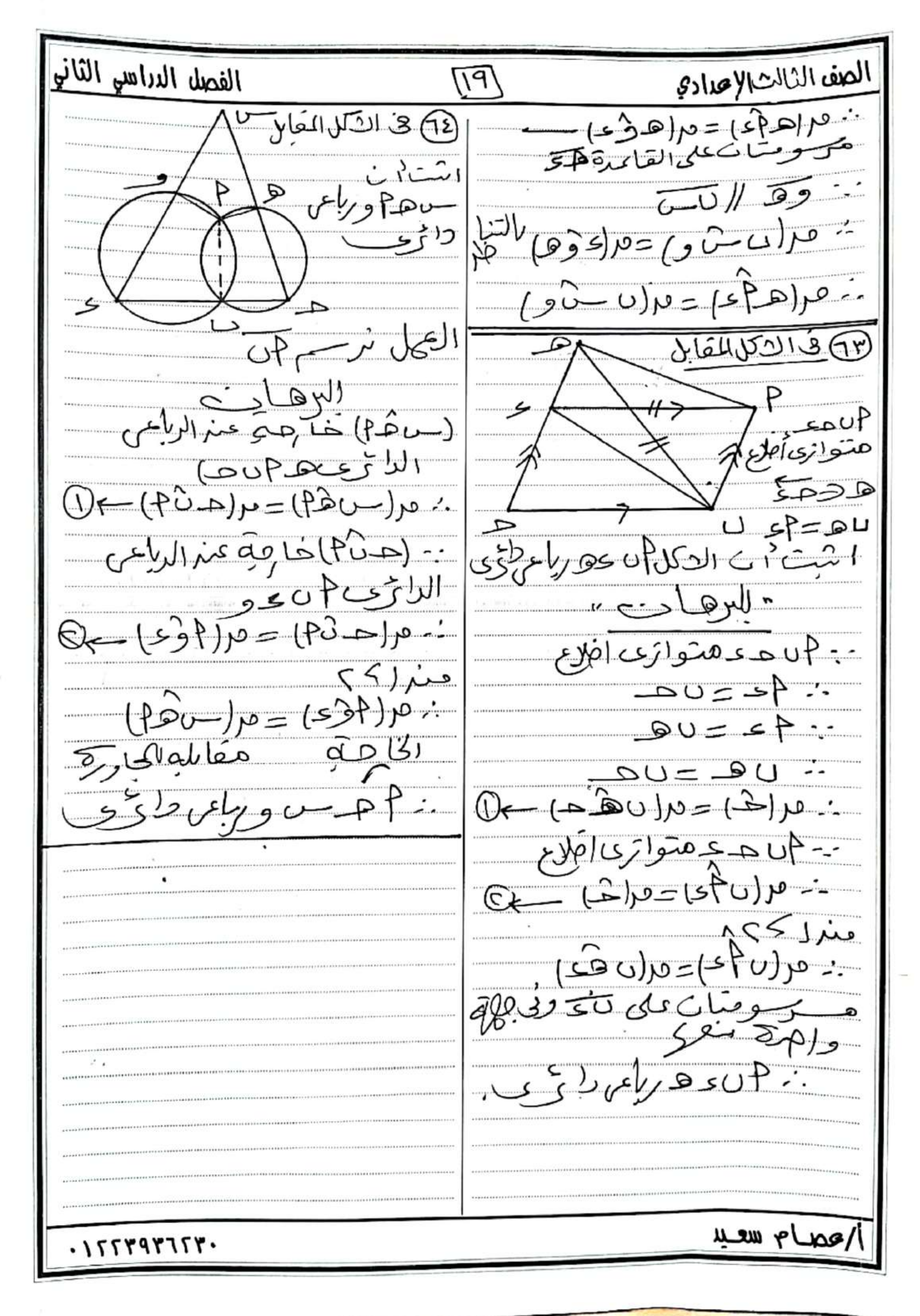
∴ مَ(∠جـ) = مَ(∠و هـ ء) بالتناظر ← (١)

∵ أ ب جـ ء رباعي دائري

∴ مَ(∠أ) + مَ(∠جـ) = ١٨٠° ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ مَ(∠أ) + مَ(∠و هـ ء) = ١٨٠°

∴ أ و هـ ء رباعي دائري.





∵ ق(∠هـ أ ء) = ق(∠هـ و ء) مرسومتان على القاعدة هـ ء

∵ و هـ // ب س

∴ ق(∠ب س و) = ق(∠ء و هـ) بالتناظر

∴ ق(∠هـ أ ء) = ق(∠ب س و)

(٦٣) في الشكل المقابل

أ ب جـ ء متوازي أضلاع

هـ ∈ جـ ء

ب هـ = أ ء

أثبت أن الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري

"البرهان"

∵ أ ب جـ ء متوازي أضلاع

∴ أ ء = ب جـ

∵ أ ء = ب هـ

∴ ب هـ = ب جـ

∴ ق(∠جـ) = ق(∠ب هـ جـ) ← (١)

∵ أ ب جـ ء متوازي أضلاع

∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠جـ) ← (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠ب أ ء) = ق(∠ب هـ ء)

مرسومتان على ب ء وفي جهة واحدة منها

∴ أ ب ء هـ رباعي دائري.

(٦٤) في الشكل المقابل

أثبت أن

س هـ أ و رباعي دائري

العمل: نرسم أ ب

البرهان

(∠س هـ أ) خارجة عن الرباعي الدائري هـ أ ب جـ

∴ ق(∠س هـ أ) = ق(∠جـ ب أ) ← (١)

∵ (∠جـ ب أ) خارجة عن الرباعي الدائري أ ب ء و

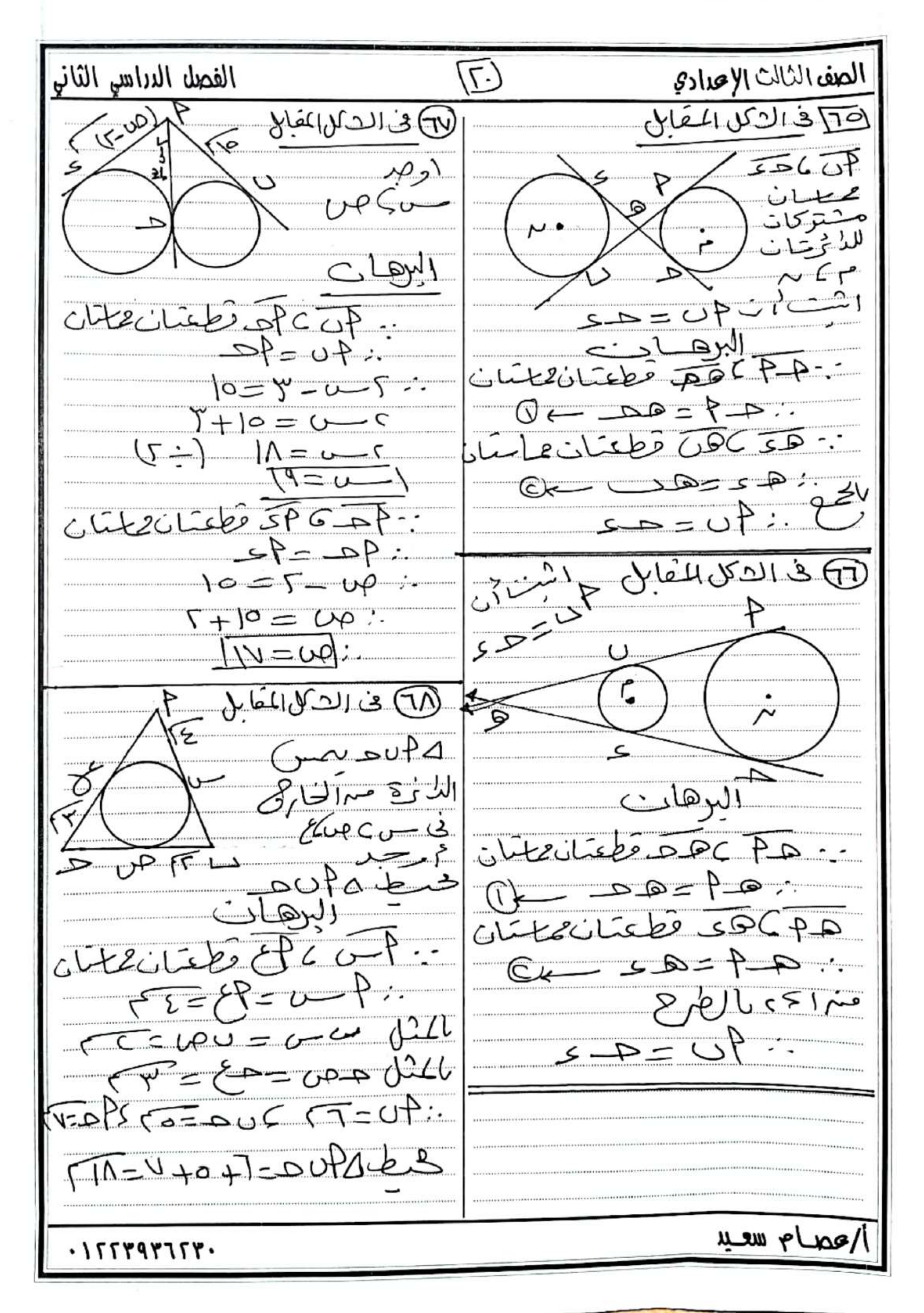
∴ ق(∠جـ ب أ) = ق(∠أ و ء) ← (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠أ و ء) = ق(∠س هـ أ)

الخارجة مقابلة للمجاورة

∴ أ هـ س و رباعي دائري





(٦٥) في الشكل المقابل

أب ، جـ د مماسان مشتركان للدائرتين م ، ن

أثبت أن: أب = جـ د

البرهان

∵ هـ أ ، هـ جـ قطعتان مماستان

∴ هـ أ = هـ جـ ← ①

∵ هـ د ، هـ ب قطعتان مماستان

∴ هـ د = هـ ب ← ②

بالجمع ∴ أب = جـ د

(٦٦) في الشكل المقابل أثبت أن: أب = جـ د

البرهان

∵ هـ أ ، هـ جـ قطعتان مماستان

∴ هـ أ = هـ جـ ← ①

∵ هـ ب ، هـ د قطعتان مماستان

∴ هـ ب = هـ د ← ②

من ١ ، ٢ بالطرح

∴ أب = جـ د

(٦٧) في الشكل المقابل

أوجد س ، ص

البرهان

∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان

∴ أب = أجـ

∴ ٢س − ٣ = ١٥

٢س = ١٥ + ٣

٢س = ١٨　(÷ ٢)

س = ٩

∵ أجـ ، أد قطعتان مماستان

∴ أجـ = أد

∴ ص − ٢ = ١٥

∴ ص = ١٥ + ٢

∴ ص = ١٧

(٦٨) في الشكل المقابل

△ أب جـ يمس الدائرة من الخارج في س ، ص ، ع

أوجد محيط △ أب جـ

البرهان

∵ أس ، أع قطعتان مماستان

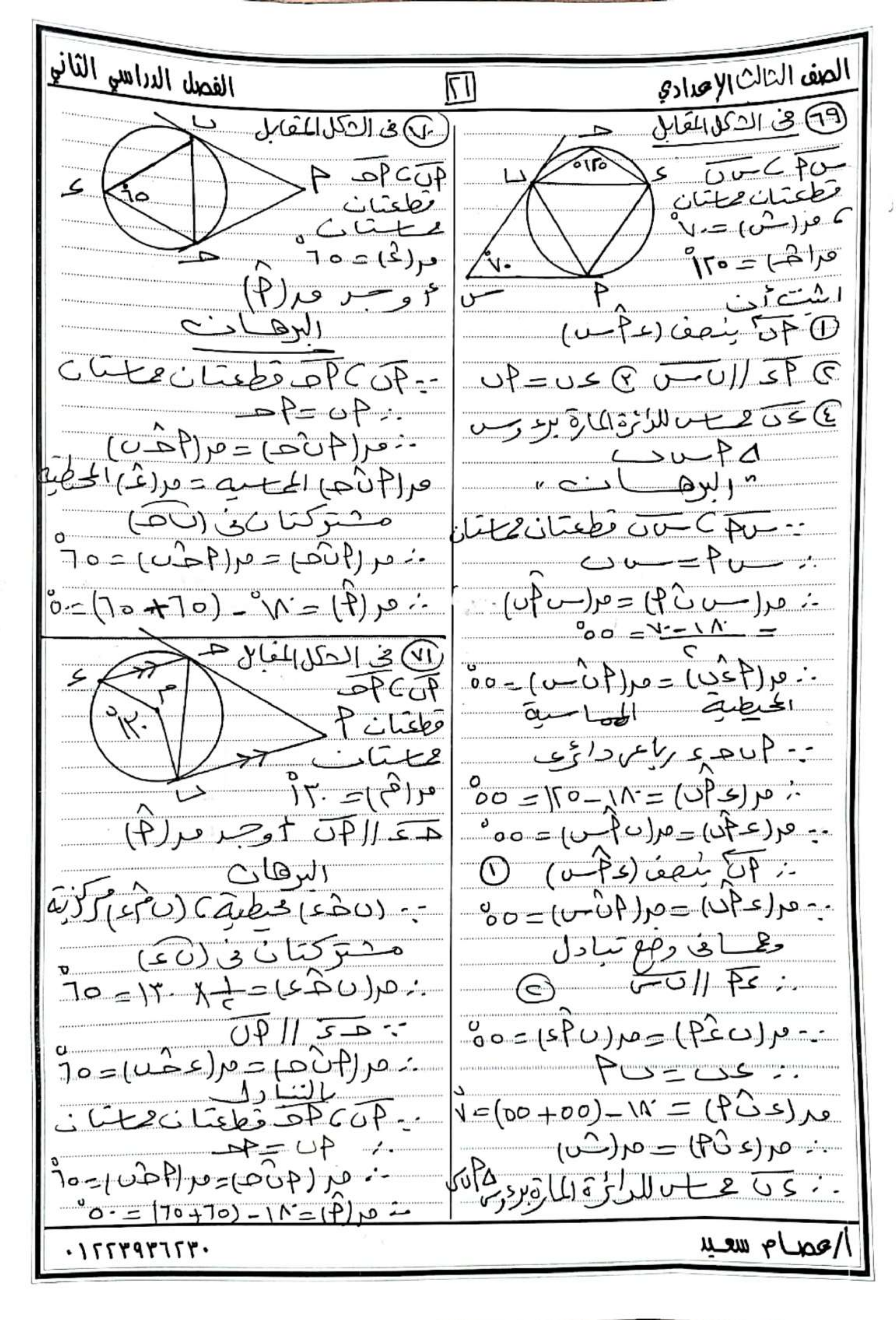
∴ أس = أع = ٤ سم

بالمثل ب س = ب ص = ٢ سم

بالمثل جـ ص = جـ ع = ٣ سم

∴ أب = ٦ سم ، ب جـ = ٥ سم ، أجـ = ٧ سم

محيط △ أب جـ = ٦ + ٥ + ٧ = ١٨ سم





(٦٩) في الشكل المقابل

س أ ، س ب قطعتان مماستان ، ق(∠ش) = ٧٠° ، ق(∠جـ) = ١٢٥°

أثبت أن:

① أب ينصف (∠د أ س)

② أد // ب س ③ د ب = أ ب

④ د ب مماس للدائرة المارة برءوس △ أ س ب

البرهان:

∵ س أ ، س ب قطعتان مماستان

∴ س أ = س ب

∴ ق(∠س ب أ) = ق(∠س أ ب) = (١٨٠ − ٧٠) ÷ ٢ = ٥٥°

∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠أ ب س) = ٥٥° المحيطية والمماسية

∵ أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠د أ ب) = ١٨٠ − ١٢٥ = ٥٥°

∵ ق(∠د أ ب) = ق(∠ب أ س) = ٥٥°

∴ أ ب ينصف (∠د أ س) ①

∵ ق(∠د أ ب) = ق(∠أ ب س) = ٥٥° وهما في وضع تبادل

∴ أد // ب س ②

∵ ق(∠ب د أ) = ق(∠ب أ د) = ٥٥°

∴ د ب = ب أ ③

ق(∠د ب أ) = ١٨٠ − (٥٥ + ٥٥) = ٧٠°

∴ ق(∠د ب أ) = ق(∠ش)

∴ د ب مماس للدائرة المارة برءوس △ أ ب س

(٧٠) في الشكل المقابل

أب ، أجـ قطعتان مماستان ، ق(∠د) = ٦٥° ، أوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان

∴ أب = أجـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب)

ق(∠أ ب جـ) المماسية = ق(∠د) المحيطية مشتركتان في (ب جـ)

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٦٥°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°

(٧١) في الشكل المقابل

أب ، أجـ قطعتان مماستان ، ق(∠م) = ١٣٠° ، جـ د // أ ب أوجد ق(∠أ)

البرهان

∵ (∠ب جـ د) محيطية ، (∠ب م د) مركزية مشتركتان في (ب د)

∴ ق(∠ب جـ د) = ١/٢ × ١٣٠ = ٦٥°

∵ جـ د // أ ب

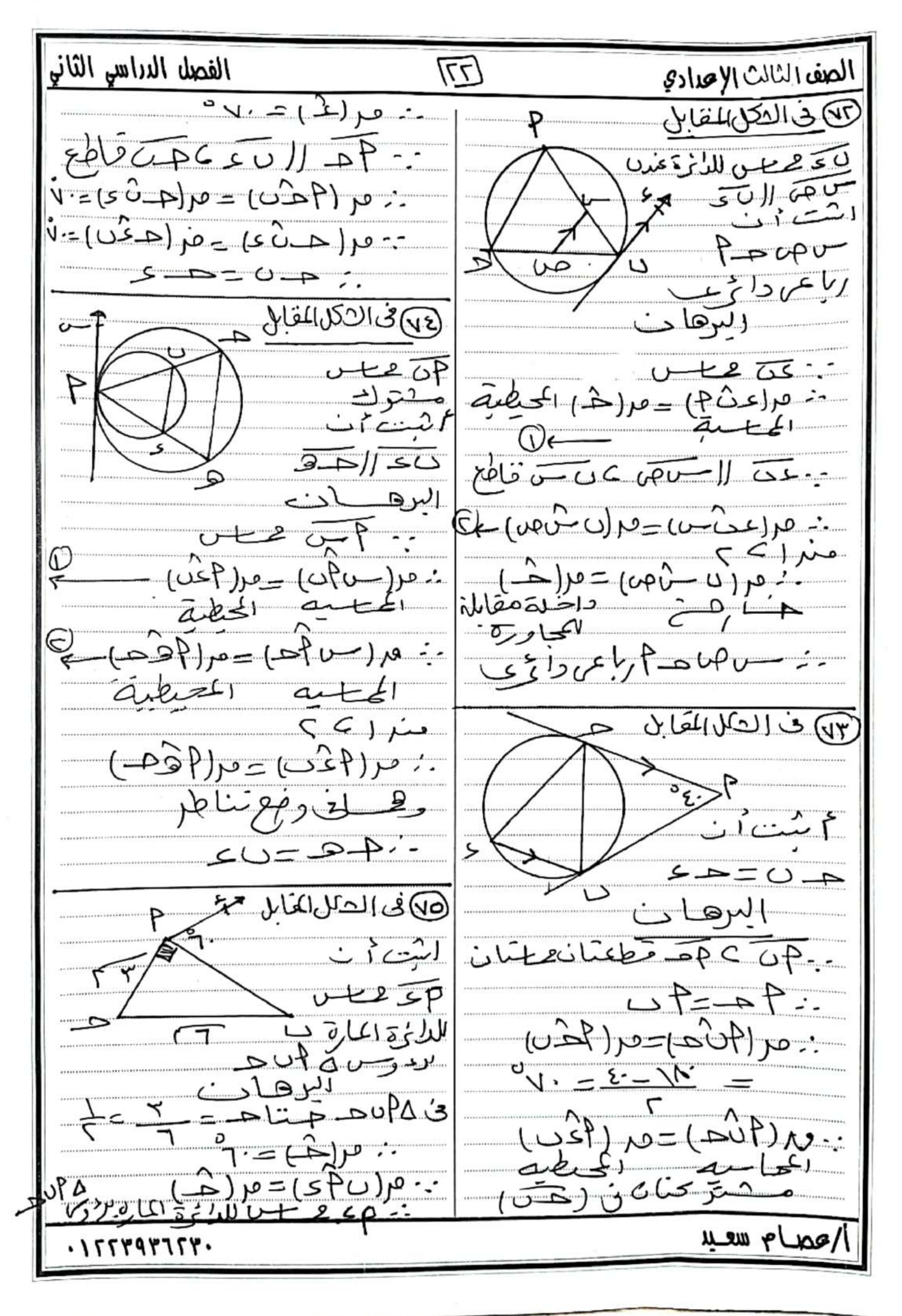
∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠د جـ ب) = ٦٥° بالتبادل

∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان

∴ أب = أجـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٦٥°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠ − (٦٥ + ٦٥) = ٥٠°



(٧٢) في الشكل المقابل

ل ء مماس للدائرة عند ب ، س ص // ل ء

اثبت أن س ص حـ أ رباعي دائري

البرهان

∵ ل ء مماس

∴ ق(∠ء ب أ) = ق(∠حـ) المحيطية المماسية ← (١)

∵ ء ل // س ص ، ب س قاطع

∴ ق(∠ء ب س) = ق(∠ب س ص) ← (٢) متبادلتان

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ب س ص) = ق(∠حـ)

خارجة داخلة مقابلة للمجاورة

∴ س ص حـ أ رباعي دائري

(٧٣) في الشكل المقابل

اثبت أن حـ ب = حـ ء

البرهان

∵ أب ، أحـ قطعتان مماستان

∴ أحـ = أب

∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢}$ = ٧٠°

∵ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠أ ء ب)

المماسية المحيطية

مشتركتان في (حـ ب)

∴ ق(∠ء) = ٧٠°

∵ أحـ // ب ء ، حـ ب قاطع

∴ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠حـ ب ء) = ٧٠°

∴ ق(∠حـ ب ء) = ق(∠حـ ء ب) = ٧٠°

∴ حـ ب = حـ ء

(٧٤) في الشكل المقابل

أس مماس مشترك

اثبت أن

ب ء // حـ هـ

البرهان

∵ أس مماس

∴ ق(∠س أ ب) = ق(∠أ ء ب) ← (١)

المماسية المحيطية

∵ ق(∠س أ حـ) = ق(∠أ هـ حـ) ← (٢)

المماسية المحيطية

من ١ ، ٢

∴ ق(∠أ ء ب) = ق(∠أ هـ حـ)

وهما في وضع تناظر

∴ حـ هـ // ب ء

(٧٥) في الشكل المقابل

اثبت أن

أ ء مماس

للدائرة المارة ب

برؤوس Δ أ ب حـ

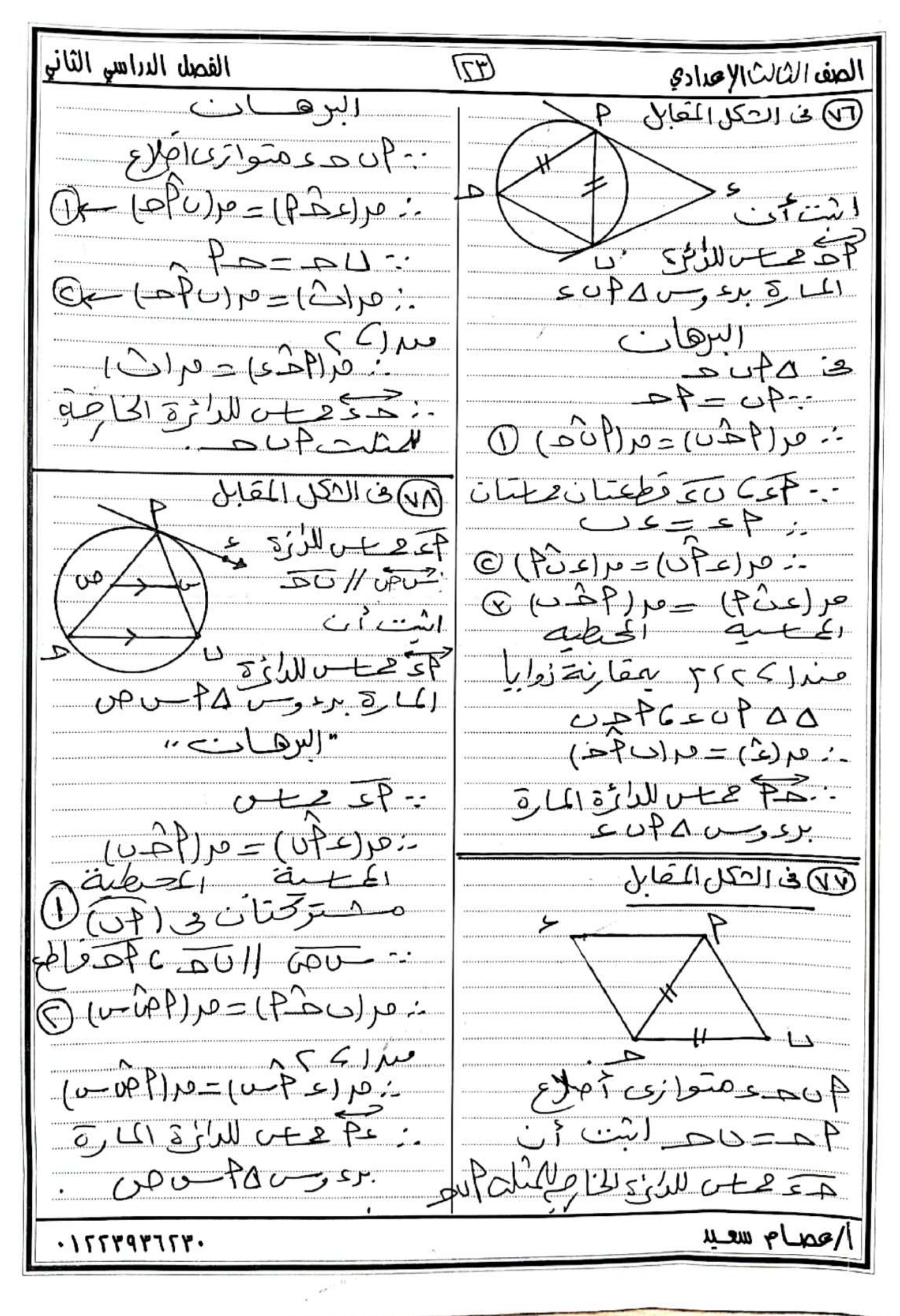
البرهان

في Δ أ ب حـ جتا حـ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

∴ ق(∠حـ) = ٦٠°

∵ ق(∠ب أ ء) = ق(∠حـ)

∴ أ ء مماس للدائرة المارة برؤوس Δ أ ب حـ



(٧٦) في الشكل المقابل

اثبت أن $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس للدائرة المارة برءوس △ أ ب ء

البرهان

في △ أ ب حـ

∵ أ ب = أ حـ

∴ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠أ ب حـ) (١)

∵ ء أ ، ء ب قطعتان مماستان

∴ ء أ = ء ب

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠ء ب أ) (٢)

ق(∠ء ب أ) = ق(∠أ حـ ب) المماسية المحيطية (٣)

من ١ ، ٢ ، ٣ بمقارنة زوايا △△ أ ب ء ، أ حـ ب

∴ ق(∠ء) = ق(∠أ حـ ...)

∴ $\overleftrightarrow{حـ أ}$ مماس للدائرة المارة برءوس △ أ ب ء

(٧٧) في الشكل المقابل

أ ب حـ ء متوازي أضلاع

أ حـ = ب حـ اثبت أن

حـ ء مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ

البرهان

∵ أ ب حـ ء متوازي أضلاع

∴ ق(∠ء حـ أ) = ق(∠ب أ حـ) (١)

∵ ب حـ = حـ أ

∴ ق(∠ب) = ق(∠ب أ حـ) (٢)

من ١ ، ٢

∴ ق(∠أ حـ ء) = ق(∠ب)

∴ حـ ء مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ .

(٧٨) في الشكل المقابل

أ ء مماس للدائرة

س ص // ب حـ

اثبت أن

$\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة المارة برءوس △ أ س ص

"البرهان"

∵ أ ء مماس

∴ ق(∠ء أ ب) = ق(∠أ حـ ب)

المماسية المحيطية

مشتركتان في (أ ب) (١)

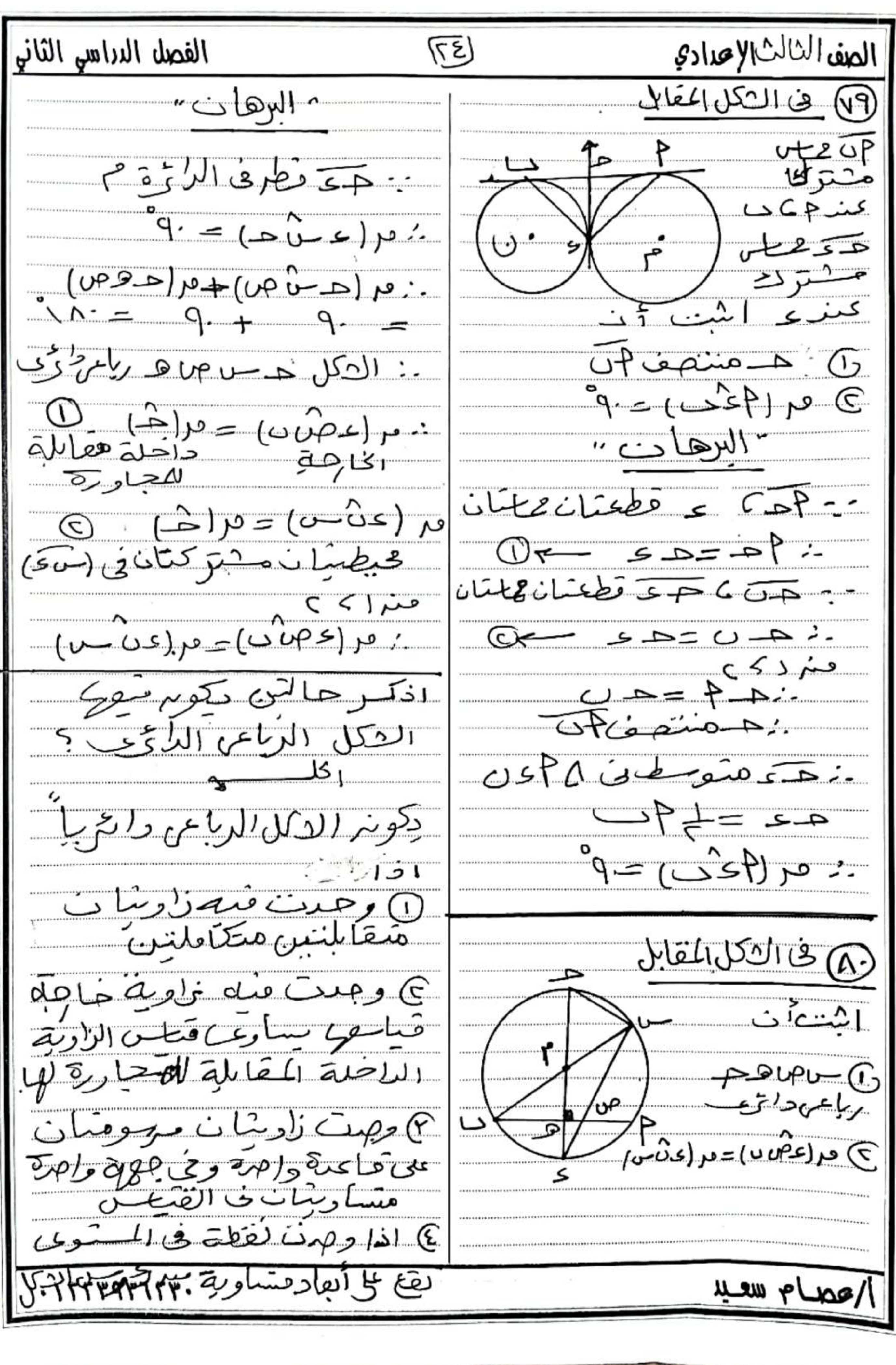
∵ س ص // ب حـ ، أ حـ قاطع

∴ ق(∠أ حـ ب) = ق(∠أ ص س) (٢)

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ء أ س) = ق(∠أ ص س)

∴ $\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة المارة برءوس △ أ س ص .





(٧٩) في الشكل المقابل

أب مماس مشترك عند أ، ب

حء مماس مشترك عند ء

اثبت أن

(١) حـ منتصف أب

(٢) ق(∠أءب) = ٩٠°

"البرهان"

∵ حأ، حء قطعتان مماستان

∴ أحـ = حء ← (١)

∵ حب، حء قطعتان مماستان

∴ حب = حء ← (٢)

من ١، ٢

∴ حأ = حب

∴ حـ منتصف أب

∴ حء متوسط في △أءب

حء = ½ أب

∴ ق(∠أءب) = ٩٠°

(٨٠) في الشكل المقابل

اثبت أن

(١) س ص هـ حـ رباعي دائري

(٢) ق(∠ءص ن) = ق(∠ء ن س)

"البرهان"

∵ حء قطر في الدائرة م

∴ ق(∠ءس حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠حـ س ص) + ق(∠حـ هـ ص)

= ٩٠ + ٩٠ = ١٨٠°

∴ الشكل حـ س ص هـ رباعي دائري

∴ ق(∠ءص ن) = ق(∠حـ) (١)

الخارجة = داخلة مقابلة للمجاورة

ق(∠ء ن س) = ق(∠حـ) (٢)

محيطيتان مشتركتان في (س ء)

من ١، ٢

∴ ق(∠ءص ن) = ق(∠ء ن س)

اذكر حالتين يكون فيهم الشكل الرباعي الدائري؟

الحل

يكون الشكل الرباعي دائريًا إذا

(١) وجدت فيه زاويتان متقابلتين متكاملتين

(٢) وجدت فيه زاوية خارجة قياسها يساوي قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

(٣) وجدت زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة متساويتان في القياس

(٤) إذا وجدت نقطة في المستوى تقع على أبعاد متساوية من كل